Numerische Verfahren und Grundlagen der Analysis

Rasa Steuding

Hochschule RheinMain Wiesbaden

Wintersemester 2011/12

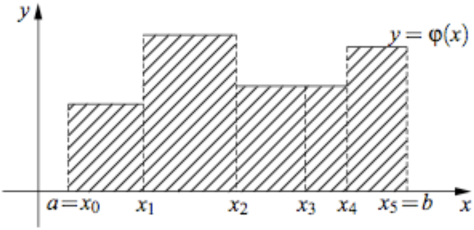
8. Integralrechnung

Treppenfunktion

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ heißt $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ **Treppenfunktion**, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass auf jedem offenen Teilintervall (x_{j-1}, x_j) die Funktion φ konstant ist. Mit $T[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$.



Integral für die Treppenfunktion. I

Für eine Treppenfunktion $\varphi \in T[a, b]$ mit zugehöriger Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ gelte $\varphi(x) = c_j$ für $x \in (x_{j-1}, x_j)$ mit $1 \leq j \leq n$. Dann ist das **Integral für die Treppenfunktion** φ erklärt durch

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}).$$

Geometrisch läßt sich für nicht-negative Treppenfunktionen φ das zugehörige Integral als Flächeninhalt zwischen dem Graphen von φ und der x-Achse eingeschränkt auf das Integrationsintervall $[a, b]$ deuten. Allgemein kann man für Treppenfunktionen mit negativen Werten die Fläche unterhalb der x-Achse negativ zählen.

Das Integral einer Treppenfunktion φ ist unabhängig von der zugrunde liegenden Unterteilung ist (da φ stückweise konstant ist).

Integral für die Treppenfunktion. II

Das Integral von Treppenfunktion ist linear: für $\varphi, \psi \in T[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\varphi + \lambda\psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \lambda \int_a^b \psi(x)dx.$$

Ist $\varphi(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so schreiben wir kurz $\varphi \le \psi$ und es gilt dann

$$\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b \psi(x)dx;$$

diese Eigenschaft heißt die **Monotonie** des Integrals.

Riemann-integrierbare Funktion

Für eine beliebige beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren wir das **Oberintegral** durch

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \ : \ \varphi \in T[a, b] \text{ mit } f \leq \varphi \right\}$$

und das **Unterintegral** durch

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \ : \ \varphi \in T[a, b] \text{ mit } \varphi \leq f \right\}.$$

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, falls

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \int_{a*}^{b} f(x)dx.$$

in diesem Falle ist das **Integral** von f definiert durch

$$\int_a^{b} f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx \ \left(= \int_{a*}^{b} f(x)dx \right).$$

Einschließung zwischen Treppenfunktionen

Satz 8.1

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *Treppenfunktionen* $\varphi, \psi \in T[a, b]$ *mit* $\varphi \le f \le \psi$ *existieren, so dass*

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von inf und sup. Ferner gilt

Satz 8.2

- *Jede stetige Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*
- *Jede monotone Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist Riemann-integrierbar.*

Satz 8.3

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar und* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dann ist auch* $f + \lambda g$ *Riemann-integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^b (f + \lambda g) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx.$$

Gilt ferner $f \leq g$, *so ist auch*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis folgt sofort aus denselben Eigenschaften für Integrale über Treppenfunktionen.

Satz 8.4

Seien $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetige Funktionen und* $\varphi \geq 0$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a,b]$, *so dass*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Im Spezialfall φ *konstant* 1 *folgt*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

für ein $\xi \in [a,b]$.

Riemannsche Summe. I

Wir unterteilen das Intervall $[a, b]$ gemäß der Zerlegung

$$Z : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

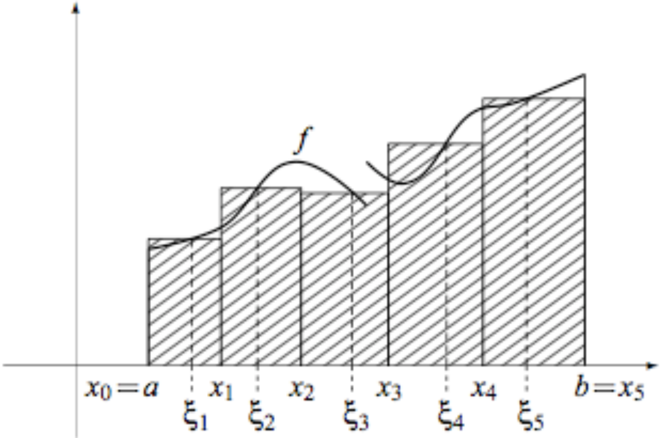
in n disjunkte Teilintervalle (x_{j-1}, x_j). Die **Feinheit** dieser Zerlegung ist definiert durch

$$\eta = \eta(Z) := \max(x_j - x_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Dann heißt

$$S(Z, f, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

die **Riemannsche Summe** zu f bezüglich Z und den **Stützstellen** $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$.



f
$x_0 = a$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_5$
ξ_1
ξ_2
ξ_3
ξ_4
ξ_5

Riemannsche Summe. II

Hierzu definieren wir eine Treppenfunktion $F = F(f, Z, \xi) \in T[a, b]$ durch

$$F(x) = f(\xi_j) \text{ für } x \in [x_{j-1}, x_j).$$

Dann gilt

$$\int_a^b F(x)dx = S(Z, f, \xi).$$

Mit zunehmender Feinheit (d.h. $\eta \to 0$) konvergiert die Riemannsche Summe gegen das Integral von f.

Wie berechnet man Integrale?

Um das Integral $\int_0^c x dx$, $c > 0$ zu berechnen, wählen wir eine äquidistante Zerlegung $Z : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c$ mit $x_j = \frac{jc}{n}$, für $0 \leq j \leq n$ und den Stützstellen $\xi_j = x_j$. Dann berechnet sich die zugehörige Riemannsche Summe wie folgt:

$$\begin{aligned} S(Z, f, \xi) &= \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{jc}{n}\left(\frac{jc}{n} - \frac{(j-1)c}{n}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{jc}{n} \cdot \frac{c}{n} = \left(\frac{c}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} j = \left(\frac{c}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{c^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\int_0^c x dx = \lim_{n \to \infty} \frac{c^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{c^2}{2},$$

was die Fläche eines Dreiecks mit Grundlinie c und Höhe c darstellt.

Integration vs. Differentiation: I

Wir definieren noch

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ und } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Wir können Integrale als Funktionen der Intervallobergrenze auffassen. Diesen 'neuen' Funktionen

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

heißen **unbestimmte Integrale**.

Integration vs. Differentiation. II

Im Folgenden bezeichnet I stets ein offenes oder abgeschlossenes oder halboffenes Intervall, dass mehr als einen Punkt enthält (endlich oder auch unendlich).

Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von $f : I \to \mathbb{R}$, wenn $F' = f$. Man kann zeigen, dass das unbestimmte Integral eine Stammfunktion des Integranden ist.

Vorsicht! Eine Stammfunktion ist nicht eindeutig bestimmt: Ist c eine Konstante, so ist mit F auch $F + c$ eine Stammfunktion (denn $F' = (F + c)')$. Andererseits gilt für zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 von f, dass diese sich nur um eine Konstante unterscheiden:

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

Also muss $(F_2 - F_1)'$ konstant sein.

Integration vs. Differentiation. III

Satz 8.5

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$. Für $x \in I$ sei $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$. Dann ist die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Beweis: Für $h \neq 0$ ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert ein $\xi_h \in [x, x+h]$ (bzw. $\xi_h \in [x+h, x]$, falls $h < 0$) mit $\int\limits_x^{x+h} f(t)dt = hf(\xi_n)$. Da $\lim\limits_{h \to 0} \xi_h = x$ und f stetig ist, folgt

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(hf(\xi_h)) = f(x).$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 8.6

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für allr $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Integration ist also die zur Differentiation inverse Operation!

Beweis: Da f stetig, ist f auch Riemann-integrierbar. Für $x \in I$ sei $F_1(x) := \int_a^x f(t)dt$. Nach Satz 8.5 ist F_1 eine Stammfunktion von f. Ist nun F_2 eine beliebige Stammfunktion von f, so gibt es nach obige Bemerkung eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $F_1 - F_2 = c$. Also folgt:

$$\begin{aligned} F_2(b) - F_2(a) &= F_1(b) - c - F_1(a) + c = F_1(b) - F_1(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

Integrale elementarer Funktionen

Wir schreiben auch

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)|_{x=a}^b \text{ bzw. } \int f(x)dx = F(x).$$

Mit unseren Kenntnissen der Differentialrechnung ergibt sich nun beispielsweise

- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$ für $x > 0$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x)$ und $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$
- $\int \exp(x) dx = \exp(x)$

Partielle Integration

Satz 8.7

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Beweis: Für $F = f \cdot g$ liefert die Produktregel $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Mit dem Satz 8.6 folgt also

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_{x=a}^b = F(x)|_{x=a}^b.$$

Als **Beispiel** berechnen wir für $a, b > 0$ das Integral von $f(x) = \log(x)$ mittels $g(x) = x$ wie folgt:

$$\int_a^b \log(x)dx = x\log(x)|_a^b - \int_a^b x(\log(x))'dx = x(\log(x) - 1)|_a^b.$$

Substitutionsregel

Satz 8.8

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Beweis: Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Für $F \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ liefert die Kettenregel $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Mit Satz 8.6 folgt daraus

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(t)|_{t=a}^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Beispiel:

- Für $c \neq 0$ gilt $\int\limits_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} \int\limits_{ac}^{bc} f(x)dx$, $(x = \varphi(t) = ct)$.