Numerische Verfahren und Grundlagen der Analysis

Rasa Steuding

Hochschule RheinMain Wiesbaden

Wintersemester 2011/12

7. Taylorreihen

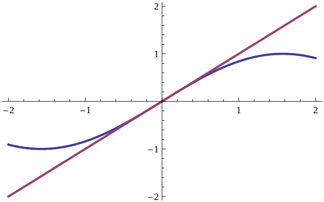
Lineare Approximation

Schon gesehen: eine Funktion $f(x)$ kann in der Nähe einer Stelle x_0 durch ihre Tangente *approximiert* werden:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \text{kleiner Fehler}$$

Beispiel: Für $f(x) = \sin(x)$ ist die Tangente an der Stelle $x_0 = 0$ durch $t(x) = x$ gegeben und man hat folglich

$$\sin(x) \approx x \text{ für kleine } |x|.$$



Approximation durch Polynome

Es solle eine Funktion $f(x)$ für x nahe bei irgendeiner Stelle x_0 durch ein Polynom vom Grad n der Form

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

approximiert werden. Man fordert

$$f(x_0) = T_n(x_0), f'(x_0) = T_n'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = T_n^{(n)}(x_0),$$

was nur sinnvoll ist, wenn $f(x)$ n-mal differenzierbar ist. Daraus erhält man das zu f gehörige **Taylorpolynom** vom Grad n an der Stelle x_0:

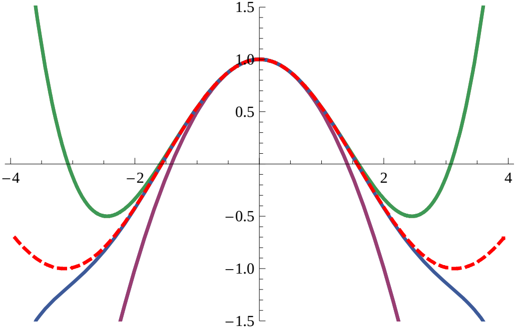
$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Beispiel

Für $f(x) = \cos(x)$ erhält man an der Stelle $x_0 = 0$

1. Näherung: $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} = 1 - \frac{x^2}{2}$
2. Näherung: $T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
3. Näherung: $T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$

Beispiel



Taylorpolynome $T_2(x)$ (lila), $T_4(x)$ (grün) und T_6 (blau) von $\cos(x)$ (rot).

Taylor-Formel

Satz 7.1

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x_0, x \in D$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

wobei

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

für ein ξ zwischen x und x_0.

Man notiert den Fehlerterm auch in der Schreibweise

$$f(x) = T_n(x) + O((x - x_0)^{n+1}).$$

($f(x) = O(g(x))$ falls es $C > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $|f(x)| \leq C|g(x)|$ für alle $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, i.e. f **ist von der Ordnung** g **bei** x_0.)

Beweis

Für $n = 0$ ist dies der Mittelwertsatz. Sei

$$g(t) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}d,$$

wobei d durch die Gleichung $g(x_0) = 0$ definiert ist. Offenbar ist $g(x) = 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert somit ein ξ zwischen x_0 und x mit $g'(\xi) = 0$. Da

$$g'(t) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n + \frac{1}{n!}(x-t)^n d,$$

folgt $f^{(n+1)}(\xi) = d$.

Beispiel

Bei der Approximation $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x)$ ist

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{4!}|x|^4 = \frac{1}{24}|x|^4.$$

Hier wurde verwendet, dass das Maximum von $|f^{(4)}(x)| = |\sin(x)|$ auf $D = \mathbb{R}$ gleich 1 ist.

Taylorreihe

Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0. Taylorreihen sind Spezialfälle von **Potenzreihen**.

Falls die Taylorreihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendig gegen f, wie das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

lehrt; hier gilt nämlich $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Immerhin konvergiert die Taylorreihe genau für diejenigen $x \in D$ gegen $f(x)$, für die das Restglied R_n aus dem Satz 7.1 gegen 0 konvergiert.

Beispiel

Alle Ableitungen $f^{(n)}(x)$ der Funktion $f(x) = \sin(x)$ sind beschränkt und erfüllen

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Es gilt dann

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

und damit $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Folglich konvergiert die Taylorreihe von $f(x) = \sin(x)$ tatsächlich gegen $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Konvergenzbereich.I

Zu jeder Taylorreihe existiert ein $r \geq 0$, sodass die Taylorreihe für $|x| < r$ absolut konvergiert und für $|x| > r$ divergiert (dabei ist $r = \infty$ zugelassen). Das Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ wird **Konvergenzbereich** genannt und die Zahl r heißt **Konvergenzradius** der Reihe. An den Randpunkten $|x| = r < \infty$ kann die Taylorreihe konvergieren oder divergieren.

Nach dem Qutientenkriterium konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, wenn sie die Bedingung

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = |x| \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

erfüllt. Daraus folgt

$$|x| < \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| .$$

Konvergenzbereich. II

Damit konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $|x| < r$ sofern

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert.

Die letzte Formel gilt auch für den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. Diese Reihe konvergiert dann für $|x - x_0| < r$ und divergiert für $|x - x_0| > r$. Konvergenzverhalten an den Randpunkten $x = x_0 \pm r$ muss separat untersucht werden.

Beispiel

Die Taylorreihe von $f(x) = \log(x)$ um $x_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
\log(x) &= 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{2\cdot 3}{4!}(x-1)^4 \pm \ldots \\
&= \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}
\end{aligned}
$$

besitzt den Konvergenzradius

$$
r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{k(-1)^{k+2}} \right| = 1
$$

und den Konvergenzbereich $0 < x \leq 2$ (für $x = 0$ ist $\log(x)$ nicht definiert und für $x = 2$ erhält man *die alternierende harmonische Reihe*, die konvergent ist.)

Rechnen mit Taylorreihen

Zwei Taylorreihen können innerhalb ihres gemeinsamen Konvergenzintervalls gliedweise addiert und multipliziert werden. Die neuen Reihen konvergieren dann mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich der beiden Ausgangsreihen. Ferner gilt

Satz 7.2

Eine Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

ist innerhalb ihes Konvergenzintervalles $(x_0 - r, x_0 + r)$ *beliebg oft stetig differenzierbar. Die Ableitungen können durch gliedweises Differenzieren erhalten werden,*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1},$$

wobei der Konvergenzradius unverändert bleibt.

Beispiel

Beispiel: Es gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots .$$

Wenn wir beiden Seiten differenzieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(\exp(x))' &= 1 + \frac{2x}{2 \cdot 1} + \frac{3x^2}{3 \cdot 2!} + \frac{4x^3}{4 \cdot 3!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots ,\end{aligned}$$

also wieder die Reihe für $\exp(x)$.

Eine Anwendung

Betrachten wir $f(x) = \exp(x)$ und $x_0 = 0$. Es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \exp(\xi)$$

für ein ξ zwischen 0 und x. **Wie groß muss n mindestens sein, damit der Fehler $R_n(x)$ für $|x| \leq 1$ höchstens 10^{-2} ist?** Für $|x| \leq 1$ erhält man die Abschätzung

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \exp(\xi) \leq \frac{1}{(n+1)!} \exp(1).$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als 10^{-2} für $n \geq 5$. Will man $\exp(x)$ für $|x| \leq 1$ auf 2 Stellen hinter dem Komma genau berechnen, so kann man das Taylorpolynom

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

verwenden.