Numerische Verfahren und Grundlagen der Analysis

Rasa Steuding

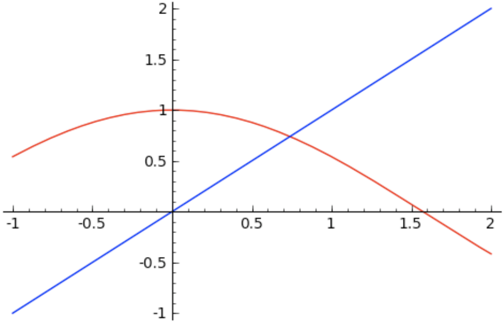
Hochschule RheinMain Wiesbaden

Wintersemester 2011/12

6. Iterationsverfahren

Wie löst man

$$\cos(x) = x?$$



Die Auffindung der Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$ wird im allgemeinem nicht exakt möglich sein. Schon bei Polynomen $f(x) = P_n(x)$ muss man auf Näherungsverfahren zurückgreifen, weil sich die Lösungen algebraischer Gleichungen höheren Grades prinzipiell nicht immer analytisch berechnen lassen.

Zwischenwertsatz

Satz 6.1

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit*

$$f(a) < 0 < f(b) \quad (bzw.\ f(b) < 0 < f(a)).$$

Dann besitzt f *eine Nullstelle in* (a,b)*, d.h. es gibt ein* $\xi \in (a,b)$ *mit* $f(\xi) = 0$.

Dieser Satz angewendet auf $g(x) = f(x) - c$ ergibt

Korollar 6.1

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $c \in \mathbb{R}$ *genüge* $f(a) < c < f(b)$*. Dann existiert ein* $\xi \in (a,b)$ *mit* $f(\xi) = c$.

Beweis

mittels **Intervallschachtelung**. O.B.d.A. sei $f(a) < 0 < f(b)$. Wir konstruieren *induktiv* eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ mit

i) $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ für alle $n \geq 1$;
ii) $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$ für alle $n \geq 1$;
iii) $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ für alle $n \geq 1$.

Dazu setzen wir zunächst $[a_0, b_0] = [a, b]$ (Induktionsanfang). Ist $[a_n, b_n]$ mit i)-iii) bereits konstruiert, so sei $m = \frac{a_n + b_n}{2}$ und wir setzen

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m], & \text{falls } f(m) \geq 0, \\ [m, b_n], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich erfüllt dies ehe Bedingungen (i)-(iii), (Induktionsschritt), was die Induktion beendet.

Beweis (Vortsetzung)

Damit ist die Folge der a_n monoton wachsend, die Folge der b_n monoton fallend, und beide beschränkt. Damit konvergieren die Folgen der a_n und b_n, und wegen (ii) gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi = \lim_{n\to\infty} b_n$$

für ein $\xi \in (a, b)$. Auf Grund der Stetigkeit gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Mit Satz 1.4 zeigt sich via (iii)

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi),$$

also gilt $f(\xi) = 0$ (und offensichtlich $a < \xi < b$).

Bisektionsverfahren

Gesucht: eine Näherung der Nullstelle $\xi \in [a, b]$ von $f(x)$ (f stetig).

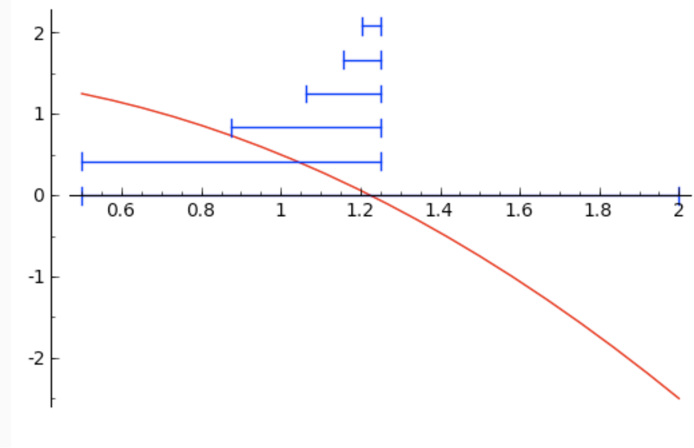
Voraussetzung: $f(a)f(b) < 0$.

Initialisierung: Setze $x_1 = a$, $x_2 = b$, $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$ und Fehlerschranke $\varepsilon > 0$.

Iteration:

1. Setze $x_3 := \frac{(x_1+x_2)}{2}$ und $f_3 := f(x_3)$;
2. Falls $|x_2 - x_1| < \varepsilon$, dann $\xi := x_3$ und Stop;
3. Falls $f_3 \cdot f_2 < 0$, dann $x_1 := x_3$ und $f_1 := f_3$, sonst $x_2 := x_3$ und $f_2 := f_3$;
4. Weiter mit Schritt 1.

Geometrische Darstellung des Bisektionsverfahrens



(Das Bild wurde mit der SAGE-Anwendung "Root Finding Using Bisection" von William Stein generiert.)

Konvergenz des Bisektionsverfahrens

Hat man für eine stetige, reellwertige Funktion f ein Intervall $[a, b]$ gefunden mit $f(a)f(b) < 0$ so erhält man durch sukzessive Halbierung des Intervalls eine Nullstelle ξ von f :

$$a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \xi \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0 = b,$$

mit

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \cdots = \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0|.$$

Bricht man das Verfahren nach n Schritten ab und wählt a_n (b_n oder $\frac{b_n+a_n}{2}$ sind auch möglich) als Näherung für ξ, dann gilt

$$|\xi - a_n| \leq \varphi(n) := |b_n - a_n|.$$

Wegen $\varphi(n+1) = \frac{1}{2}\varphi(n)$ reduziert sich der Fehler bei jedem Schritt (wenigstens) um den konstanten Faktor $\frac{1}{2}$. Man bezeichnet so ein Verfahren als **linear konvergent**.

Konvergenz von Näherungsverfahren

Allgemeiner heißt ein iteratives Verfahren **konvergent von der Ordnung** α, wenn Fehlerschranken $(\varphi(n))_n$ und eine Konstante K angegeben werden können, sodass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n+1)}{(\varphi(n))^\alpha} = K.$$

- *Lineare Konvergenz* ($\alpha = 1$) impliziert, dass die Anzahl der korrekten Dezimalstellen sich in jedem Iterationsschritt um eine Konstante erhöht.
- *Quadratische Konvergenz* ($\alpha = 2$) bedeutet, dass sich die Anzahl der korrekten Dezimalstellen mit jedem Iterationsschritt näherungsweise verdoppelt.

Mittelwertsatz

Satz 6.2

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die auf* (a,b) *differenzierbar ist, dann gibt es eine Zwischenstelle* $z \in (a,b)$ *mit*

$$f(b) - f(a) = f'(z)(b-a).$$

Das Newtonsche Näherungsverfahren. I

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ **stetig differenzierbar**, d.h. f ist auf D differenzierbar mit stetiger Ableitung. Gilt dann $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so betrachte man die zum Startwert $x_0 \in D$ rekursiv definierte Folge

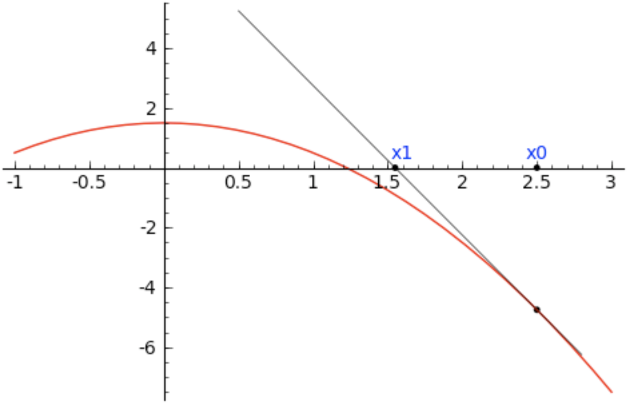
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Im Falle der Konvergenz der Folge $(x_n)_n$ gegen ein $\xi \in D$ folgt auf Grund der Stetigkeit von f

$$\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} \text{ bzw. } f(\xi) = 0.$$

In allgemeinem braucht dieses Verfahren jedoch nicht zu konvergieren.

Geometrische Darstellung des Newtonschen Näherungsverfahrens



Konvergenz des Newtonschen Näherungsverfahrens. I

Anwenden des Mittelwertsatzes führt auf

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi| &= \left| x_n - \frac{f(x_n) - f(\xi)}{f'(x_n)} - \xi \right| \\ &= \left| (x_n - \xi) \left(1 - \frac{f'(z_1)}{f'(x_n)} \right) \right| \\ &= \left| (x_n - \xi) \left(\frac{f'(x_n) - f'(z_1)}{f'(x_n)} \right) \right| \end{aligned}$$

mit einer Zwischenstelle z_1 zwischen x_n und ξ. Wenn f zwei mal stetig differenzierbar ist, kann man den Mittelewertsatz noch mal anwenden für die Differenz

$$f'(x_n) - f'(z_1) = f''(z_2)(x_n - z_1)$$

mit einer weiteren Zwischenstelle z_2.

Konvergenz des Newtonschen Näherungsverfahrens. II

Mit der Abschäzung $|x_n - z_1| \leq |x_n - \xi|$ folgt

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \left| \frac{f''(z_2)}{f'(x_n)} \right| |x_n - \xi|^2.$$

Auf einem reellen Interval $I = [a, b]$ mit $\xi \in [a, b]$ und $f'(x) \neq 0$ lässt sich der Faktor durch

$$\left| \frac{f''(z_2)}{f'(x_n)} \right| \leq \frac{\max_{z \in I} |f''(z)|}{\min_{z \in I} |f'(z)|} =: K > 0$$

für beliebige z_2 ind x_n in I abschätzen. Damit ist die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens gezeigt.

Das Newtonsche Näherungsverfahren. II

Initialisierung: Startwert x_0 und Fehlerschranke $\varepsilon > 0$.

Iteration:
Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

1. berechne $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$;
2. falls $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, dann $\xi := x_{n+1}$ und Stop, sonst weiter mit Schritt 1.

Beim Newton-Verfahren ist es wichtig, einen geeigneten Startwert x_0 zu finden (in der Regel es ist nicht einfach). Liegt der Startwert nicht nahe genug an der gesuchten Nullstelle, kann es passieren, dass das Newton-Verfahren gegen andere Nullstelle konvergiert oder überhaupt nicht konvergiert.

Beispiel

Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = x^2 - 2$ definierte Funktion. Wir setzen $x_0 = 1$ und erhalten mit Newton-Verfahren

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$$

die Werte $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.4167\ldots$, $x_3 = 1.4142\ldots$ als Näherung für $\sqrt{2}$. Das Bissektionsverfahren mit $a_0 = 0$ und $b_0 = 2$ erreicht den Wert $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ auf 4 Nachkommastellen nach 14 Iterationen:

$$\begin{gathered}1, 1.5, 1.25, 1.375, 1.4375, 1.4062\ldots,\\ 1.4218\ldots, 1.4117\ldots, 1.4160\ldots, 1.4150\ldots,\\ 1.4145\ldots, 1.4143\ldots, 1.4141\ldots, 1.4142\ldots\end{gathered}$$

Regula falsi

Ersetzt man im Newton-Verfahren die Ableitung $f'(x)$ durch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

so erhält man **die Regula Falsi**

$$x_{n+1} := x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (x_0, x_1 \text{ vorgegeben}).$$

Pro Iterationsschritt ist hier nur eine erneute Auswertung von f nötig. Demgegenüber benötigt etwas das besser konvergierende Newton-Verfahren eine Auswertung von f und von f' pro Iterationschritt. Im Bezug auf den gesamten Rechenaufwand erweist sich Regula falsi oft als günstiger.