Numerische Verfahren und Grundlagen der Analysis

Rasa Steuding

Hochschule RheinMain Wiesbaden

Wintersemester 2011/12

5. Differentialrechnung

Differenzierbarkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt in einem Punkt $x \in D$ **differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x)$ heißt **Ableitung** von f im Punkt x. Bei der Limesbildung sind nur Folgen $(h_n)_n$ mit

$$\lim_{n \to \infty} h_n = 0, \quad h_n \neq 0 \text{ und } x + h_n \in D$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erlaubt. Die Funktion f heißt **differenzierbar in** D, falls f in jedem $x \in D$ differenzierbar ist.

Wenn wir für $x_0 \in D$ den *Dfferenzenquotienten* mit $x = x_0 + h$ schreiben, erhalten wir

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Beispiele:

- konstante Funktionen sind differenzierbar mit Ableitung 0.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a. \end{aligned}$$

- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x). \end{aligned}$$

- Die Funktion $abs : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar:

$$\lim_{h\to 0-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \neq \lim_{h\to 0+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{h}{h} = +1.$$

Ableitung elementarer Funktionen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	
c (Konstante)	0	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}$
x^a	ax^{a-1}	$x > 0, a \in \mathbb{R}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \log(a)}$	$a \neq 1, a > 0$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \log(a)$	$a > 0$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	

Satz 5.1

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein Punkt, für den eine Folge $(x_n)_n$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ existiert. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in a differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für $x \in D$

$$f(x) = f(a) + c(x - a) + o(|x - a|)$$

bei $x \to a$. In diesem Fall ist $c = f'(a)$.

Dann gilt also

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \text{kleiner Fehler}$$

Beweis (notwendige Bedingung)

Sei zunächst f differenzierbar in a mit $c = f'(a)$. Wir definieren die Funktion φ durch

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x).$$

Dann ist

$$\frac{\varphi(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c$$

und also

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0$$

bzw. $\varphi(x) = o(|x-a|)$, was zu zeigen war.

Beweis (hinreichende Bedingung)

Gilt nun umgekehrt

$$f(x) = f(a) + c(x - a) + \varphi(x)$$

mit $\varphi(x) = o(|x - a|)$ bzw. $\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$, so ist

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c \right) = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x - a} = 0,$$

woraus folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c.$$

Also ist f differenzierbar in a mit $f'(a) = c$.

Nach Satz 5.1 gilt für eine in a differenzierbare Funktion f

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (f(a) + f'(a)(x-a) + o(|x-a|)) = f(a).$$

Damit gilt also

Korollar 5.1

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in D$, so ist f auch stetig in a.

Rechenregeln.I

Satz 5.2

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelten:

- *$f + g : D \to \mathbb{R}$ ist in $x \in D$ differenzierbar und $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.*
- *$\lambda f : D \to \mathbb{R}$ ist in $x \in D$ differenzierbar und $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.*
- *(Produktregel) $fg : D \to \mathbb{R}$ ist in $x \in D$ differenzierbar und $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*
- *(Quotientenregel) Wenn $g(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in D$ ist, so ist $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar und*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Beispiele

- Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann gilt f_n ist differenzierbar mit $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Die Fälle $n = 0, 1$ wurden bereits in Beispielen oben abgehadelt. Der allgemeine Fall folgt per Induktion:
  $n \mapsto n+1$: Wegen $f_{n+1} = f_1 f_n$ gilt nach der Produktregel

$$f_{n+1}'(x) = f_1'(x)f_n(x) + f_1(x)f_n'(x) = x^n + nx^n = (n+1)x^n.$$

- Zusammen mit der Quotientenregel liefert das letzte Beispiel für $x \neq 0$

$$\left(\frac{1}{f_n}\right)'(x) = \frac{-f_n'(x)}{(f_n(x))^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

  Es gilt also für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

  (mit $x \neq 0$ sofern $n < 0$).

Rechenregeln. II

Satz 5.3 (Kettenregel)

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. f sei in $x \in D$ und g in $y = f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist $g(f) : D \to \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbar mit

$$(g(f))'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Beispiel: $(\exp(42x))' = \exp(42x) \cdot (42x)' = 42 \exp(42x)$.

k-te Ableitung

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung f' differenzierbar in $x \in D$, so heißt

$$f''(x) := (f')'(x)$$

die zweite Ableitung von f im Punkte x. Allgemeiner definiert man die k-**te Ableitung** $f^{(k)}$ im Punkte $x \in D$, falls f $(k-1)$-mal differenzierbar in einer Umgebung von x ist, und die $(k-1)$-te Ableitung in x differenzierbar ist. Die 0-te Ableitung von f ist die Funktion f selbst.

Beispiel: Es gilt

$$\sin^{(0)} = \sin, \quad \sin^{(1)} = \cos, \quad \sin^{(2)} = -\sin, \quad \sin^{(3)} = -\cos$$

sowie

$$\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin, \quad \cos^{(2n)} = (-1)^n \cos .$$

Extrema

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f besitzt in $x \in (a, b)$ ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle y mit $|x - y| < \varepsilon$

$$f(x) \geq f(y) \qquad (\text{bzw. } f(x) \leq f(y)).$$

Extremum ist der Oberbegriff von Maximum und Minimum; ihre Bestimmung ist von großer praktischer Bedeutung.

Satz 5.4

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine dfferenzierbare Funktion.

1. *Wenn f in $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum besitzt, dann ist $f'(x) = 0$.*
2. *Wenn $f'(x) = 0$ für ein $x \in (a, b)$, in dem auch f'' existiert und $f''(x) < 0$ ist, dann ist x ein lokales Maximum von f. Wenn $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$, dann liegt ein lokales Minimum vor.*

Extrema

Man spricht über (globales) **Maximum** (bzw. **Minimum**) von $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkte $x_0 \in D$, falls die Ungleichung $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw.$f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in D$ gilt, nicht nur für x in einer kleinen Umgebung von x_0.

Satz 5.5

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ im Intervall $[0, 5]$ besitzt ein lokales Minimum im Punkte $x_{min} = 1$ mit $f(1) = 1$, an dieser Stelle nimmt f auch ein (globales) Minimum an; ihr (globales) Maximum ist an der Stelle $x_{max} = 5$ mit $f(5) = 17$.

Satz 5.6

Es seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *zwei differenzierbare Funktionen mit* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$. *Ferner gelte entweder*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to a+} g(x) = +\infty \text{ oder } = -\infty.$$

Dann ist

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Limes auf der rechten Seite existiert ($+\infty$ *oder* $-\infty$ *sind auch erlaubt*).

Eine analoge Regel gilt für $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Beispiel: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(x)} = \frac{1}{4}$.

Das Newtonsche Näherungsverfahren. I

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ **stetig differenzierbar**, d.h. f ist auf D differenzierbar mit stetiger Ableitung. Gilt dann $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so betrachte man die zum Startwert $x_0 \in D$ rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Im Falle der Konvergenz der Folge $(x_n)_n$ gegen ein $\eta \in D$ folgt auf Grund der Stetigkeit von f

$$\eta = \eta - \frac{f(\eta)}{f'(\eta)} \text{ bzw. } f(\eta) = 0.$$

In allgemeinem braucht dieses Verfahren jedoch nicht zu konvergieren. In Spezialfällen hingegen hat man

Das Newtonsche Näherungsverfahren. II

Satz 5.7

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ und } f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Dann gibt es genau ein $\zeta \in (a,b)$ mit $f(\zeta) = 0$ und die Folge $(x_n)_n$, rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit einem beliebigem Startwert $x \in [a,b]$ mit $f(x_0) \geq 0$, (ist wohldefiniert und) konvergiert monoton fallend gegen die Nullstelle ζ.

Beispiel: Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = x^2 - 2$ denierte Funktion. Wir setzen $x_0 = 1$ und erhalten mit

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$$

die Werte $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.4167\ldots$, $x_3 = 1.4142\ldots$ als Näherung für $\sqrt{2}$.