

Numerische Verfahren und Analysisgrundlagen
Klausur am 8. Februar 2012

Nachname, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

- Auf jede der folgenden acht Aufgaben werden maximal vier Punkte vergeben. Mit zwölf Punkten haben Sie sicher bestanden. Mit ≥ 20 Punkten bekommen Sie eine **1.0**.
- Sie haben 90 Minuten Zeit und dürfen als Hilfsmittel nur eine auf einem A4 Blatt (beide Seiten) selbstgeschriebene Formelsammlung benutzen.

Viel Erfolg!

Mit meiner Unterschrift bestätige ich, dass ich die Aufgaben eigenständig gelöst und nur die zugelassenen Hilfsmittel verwendet habe.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note
Punkte										

1. AUFGABE

Sind die Folgen (a_n) , (b_n) , (c_n) konvergent oder divergent bei $n \rightarrow \infty$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \frac{3n^2 - 7}{2n + 1}$, (1 Punkt)

b) $b_n = \frac{2}{n^3} \sum_{j=1}^n j$, (2 Punkte)

c) $c_n = \frac{n!}{2^n}$. (1 Punkt)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 7}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n} - \frac{7}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \frac{7}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \infty$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} \sum_{j=1}^n j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} \cdot \frac{n^2 + n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0 + 0 = 0$
 $= \frac{n(n+1)}{2}$

c) $c_n = \frac{n!}{2^n} = \frac{1}{\frac{2^n}{n!}}$; $\frac{2^n}{n!}$ treten als Summanden in der konvergenten Exponentialreihe $\exp(2)$ auf, also $\frac{2^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Daher ist (c_n) divergent.

Sind die Folgen (a_n) , (b_n) , (c_n) konvergent oder divergent bei $n \rightarrow \infty$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \frac{-7n^2 + 3}{n^3 - 2}$, (1 Punkt)

b) $b_n = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n j$, (2 Punkte)

c) $c_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}$. (1 Punkt)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n^2 + 3}{n^3 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-7n^2}{n^3} + \frac{3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} - \frac{2}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{7}{n} + \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{n^2 + n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = \infty$

c) $c_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}$ treten als Summanden in der konvergenten Exponentialreihe $\exp(\sqrt{2})$ auf, also $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

2. AUFGABE

Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = O(1),$ (2 Punkte)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} = O(1).$ (2 Punkte)

a) Falsch. Wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$ divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ im Vergleich mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.Damit steht auf der linken Seite der Identität eine unbeschränkte Größe.b) Richtig. Auf der linken Seite der Identität steht eine beschränkte Größe, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}_{< 1}$$

ist eine konvergente geometrische Reihe.

Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = O(1),$ (2 Punkte)

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{\frac{n}{2}} = O(1).$ (2 Punkte)

a) Richtig. Wegen $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ für $n \geq 1$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ im Vergleich mit der konvergentenReihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Damit steht auf der linken Seite der Identität eine beschränkte Größe.b) Falsch. Auf der linken Seite der Identität steht eine unbeschränkte Größe, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{\frac{n}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{3})^n}_{> 1}$$

ist eine divergente geometrische Reihe.

3. AUFGABE

Untersuchen Sie für welche Werte $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Funktion

$$f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f_a(x, y) = x^2 - ay^2$$

Extrema besitzt und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

(4 Punkte)

Notwendige Bedingung:

$$\text{grad } f_a(x, y) = \left(\frac{\partial f_a(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f_a(x, y)}{\partial y} \right) = (2x, -2ay) = (0, 0) \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} (x, y) = (0, 0)$$

Hinreichende Bedingung:

$$H_{f_a}(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_a(0, 0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_a(0, 0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_a(0, 0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_a(0, 0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix}$$

- Für $a < 0$ ist $H_{f_a}(0, 0)$ positiv definit. Damit liegt im $(0, 0)$ ein Minimum.
- Für $a > 0$ ist $H_{f_a}(0, 0)$ indefinit. Damit ist $(0, 0)$ kein Extremum.

Untersuchen Sie für welche Werte $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Funktion

$$f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f_a(x, y) = -ax^2 - y^2$$

Extrema besitzt und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

(4 Punkte)

Notwendige Bedingung:

$$\text{grad } f_a(x, y) = (-2ax, -2y) = (0, 0) \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} (x, y) = (0, 0)$$

Hinreichende Bedingung:

$$H_{f_a}(0, 0) = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Für $a > 0$ ist $H_{f_a}(0, 0)$ negativ definit. Damit liegt im $(0, 0)$ ein Maximum.
- Für $a < 0$ ist $H_{f_a}(0, 0)$ indefinit. Damit liegt im $(0, 0)$ kein Extremum.

4. AUFGABE

a) Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom $T_2(x)$ der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (2 Punkte)

b) Schätzen Sie den Fehler

$$\left| \sin\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - T_2\left(\frac{1}{2}\right) \right|$$

ab. (2 Punkte)

$$a) f(0) = \sin\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), f'(0) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), f''(0) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 \quad (x_0 = 0)$$

$$b) f'''(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left| \sin\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - T_2\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} \left(\frac{1}{2} - 0\right)^3 \right| = \left| \frac{-\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right|$$

$$= \frac{|\cos(\xi - \frac{\pi}{4})|}{6 \cdot 8} \quad (\text{mit einem } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{1}{2})$$

a) Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom $T_2(x)$ der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (2 Punkte)

b) Schätzen Sie den Fehler

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - T_2\left(\frac{1}{2}\right) \right|$$

ab. (2 Punkte)

$$a) f(0) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot (-1) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right), f'(0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right), f''(0) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}x^2 \quad (x_0 = 0)$$

$$b) f'''(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - T_2\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} \left(0 - \frac{1}{2}\right)^3 \right| = \left| \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4} - \xi\right)}{6} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \right|$$

$$= \frac{|\sin(\frac{\pi}{4} - \xi)|}{6 \cdot 8} \quad (0 \leq \xi \leq \frac{1}{2})$$

$$\leq \frac{1}{48}$$

5. AUFGABE

a) Zeigen Sie, dass die durch

$$p(x) = x^3 - x + 1$$

für $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion eine Nullstelle r im Intervall $[-2, -1]$ besitzt. (1 Punkt)b) Benutzen Sie das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = -\frac{3}{2}$, um eine Näherung an r zu finden, die weniger als $\frac{1}{10}$ von r abweicht. (3 Punkte)

$$a) \left. \begin{array}{l} p(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -5 < 0 \\ p(-1) = (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 > 0 \end{array} \right\} \text{Mittelwertsatz} \Rightarrow p(x) \text{ besitzt eine Nullstelle im } [-2, -1]$$

$$b) x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{3x_n^3 - x_n^3 + x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3x_n^2 - 1}$$

$$\bullet x_0 = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = \frac{2x_0^3 - 1}{3x_0^2 - 1} = \frac{2 \cdot (-\frac{3}{2})^3 - 1}{3 \cdot (-\frac{3}{2})^2 - 1} = \frac{2 \cdot (-\frac{27}{8}) - 1}{3 \cdot \frac{9}{4} - 1} = \frac{-\frac{27}{4} - \frac{4}{4}}{\frac{27}{4} - \frac{4}{4}} = \frac{-31}{23}$$

$$|x_1 - x_0| = \left| -\frac{31}{23} + \frac{3}{2} \right| = \frac{7}{46} = \frac{70}{460} > \frac{46}{460} = \frac{1}{10}$$

$$\bullet x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 1} = -\frac{71749}{54142}, \quad |x_2 - x_1| = \frac{1225}{54142} < \frac{1}{10}$$

a) Zeigen Sie, dass die durch

$$p(x) = x^3 + x - 3$$

für $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion eine Nullstelle r im Intervall $[1, 2]$ besitzt. (1 Punkt)b) Benutzen Sie das Newton-Verfahren mit dem Startwert $x_0 = \frac{3}{2}$, um eine Näherung an r zu finden, die weniger als $\frac{1}{10}$ von r abweicht. (3 Punkte)

$$a) \left. \begin{array}{l} p(1) = 1^3 + 1 - 3 = -1 < 0 \\ p(2) = 2^3 + 2 - 3 = 7 > 0 \end{array} \right\} \text{Zwischenwertsatz} \Rightarrow p(x) \text{ besitzt eine Nullstelle im } [1, 2]$$

$$b) x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 3}{3x_n^2 + 1} = \frac{3x_n^3 + x_n^3 - x_n^3 - x_n + 3}{3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 3}{3x_n^2 + 1}$$

$$\bullet x_0 = \frac{3}{2}, \quad x_1 = \frac{2x_0^3 + 3}{3x_0^2 + 1} = \frac{2 \cdot (\frac{3}{2})^3 + 3}{3 \cdot (\frac{3}{2})^2 + 1} = \frac{2 \cdot \frac{27}{8} + 3}{3 \cdot \frac{9}{4} + 1} = \frac{\frac{27}{4} + \frac{12}{4}}{\frac{27}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{39}{31}$$

$$|x_1 - x_0| = \left| \frac{39}{31} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{78 - 93}{62} \right| = \frac{15}{62} = \frac{150}{620} > \frac{62}{620} = \frac{1}{10}$$

$$\bullet x_2 = \frac{2x_1^3 + 3}{3x_1^2 + 1} = \frac{208011}{171244}, \quad |x_2 - x_1| = \frac{7425}{171244} < \frac{1}{10}$$

6. AUFGABE

Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$, (1 Punkt)

b) $\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$, (1 Punkt)

c) $\int_0^{\pi} x^2 \sin(x) dx$. (2 Punkte)

a) $\int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$

b) $\int_0^{\pi} x \cos(x) dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos(x) dx \\ du = dx, \quad v = \sin(x) \end{array} \right] = x \sin(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x) dx$
 $= \pi \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_0 - 0 \cdot \sin(0) - 2 = 0 - 2 = -2$ (ans a))

c) $\int_0^{\pi} x^2 \sin(x) dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \sin(x) dx \\ du = 2x dx, \quad v = -\cos(x) \end{array} \right] = -x^2 \cos(x) \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \cos(x) dx$
 $= -\pi^2 \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - (-0^2 \cos(0)) + 2 \cdot (-2) = \pi^2 - 4$ (ans b))

Berechnen Sie die Integrale:

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$, (1 Punkt)

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$, (1 Punkt)

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx$. (2 Punkte)

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin(x) dx \\ du = dx, \quad v = -\cos(x) \end{array} \right] = -x \cos(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$
 $= -\frac{\pi}{2} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 - \left(+\frac{\pi}{2} \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_0 \right) + 2 = 0 + 2 = 2$ (ans a))

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \cos(x) dx \\ du = 2x dx, \quad v = \sin(x) \end{array} \right] = x^2 \sin(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$
 $= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 - \left(-\frac{\pi}{2} \right)^2 \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1} - 2 \cdot 2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} - 4 = \frac{\pi^2}{2} - 4$ (ans b))

7. AUFGABE

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit Hilfe der Trennung der Variablen:

$$-y' + \exp(y - x) = 0, \quad y(0) = 2. \quad (4 \text{ Punkte})$$

$$\exp(u) = e^u$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \exp(y-x) = \exp(y) \cdot \exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)}$$

$$\int \frac{dy}{\exp(y)} = \int \frac{dx}{\exp(x)}$$

$$\int \exp(-y) dy = \int \exp(-x) dx$$

$$-\exp(-y) = -\exp(-x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\exp(-y) = \exp(-x) - c$$

$$-y = \log(\exp(-x) - c)$$

$$y = -\log(\exp(-x) - c)$$

$$-2 = \log(\exp(0) - c) \Leftrightarrow$$

$$-2 = \log(1 - c) \Leftrightarrow$$

$$e^{-2} = 1 - c \Leftrightarrow c = 1 - e^{-2}$$

$$y(x) = \log\left(\frac{1}{\exp(-x) - 1 + \frac{1}{e^2}}\right),$$

$$x < -\log\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mit Hilfe der Trennung der Variablen:

$$y' - \exp(x - y) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}. \quad (4 \text{ Punkte})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \exp(x-y) = \exp(x) \cdot \exp(-y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\int \exp(y) dy = \int \exp(x) dx$$

$$\exp(y) = \exp(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = \log(\exp(x) + c)$$

$$\frac{1}{2} = \log(\exp(0) + c) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \log(1 + c) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} = 1 + c \Leftrightarrow c = e^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$y(x) = \log(\exp(x) + e^{\frac{1}{2}} - 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

8. AUFGABE

a) Es sei

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -\frac{1}{x}.$$

Bestimmen Sie einen Näherungswert T_3 für

$$I := \int_{-4}^{-1} f(x) dx$$

mit Hilfe der Trapezregel für drei Teilintervalle. (2 Punkte)

b) Schätzen Sie den Fehler $|T_3 - I|$ ab. (2 Punkte)

$$a) \quad h = \frac{-1 - (-4)}{3} = \frac{3}{3} = 1, \quad x_0 = -4, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -1$$

$$T_3 = h \cdot \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{2} f(x_3) \right) \\ = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{3+8+24}{24} = \frac{35}{24}$$

$$b) \quad |T_3 - I| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [-4, -1]} |f''(x)| \cdot \underbrace{|-1 - (-4)|}_{=3} \\ \leq \frac{1}{4} \max_{x \in [-4, -1]} \left| -\frac{2}{x^3} \right| = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

a) Es sei

$$f: \mathbb{R}_{>-2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x+2).$$

Bestimmen Sie einen Näherungswert T_3 für

$$I := \int_{-1}^2 f(x) dx$$

mit Hilfe der Trapezregel für drei Teilintervalle. (2 Punkte)

b) Schätzen Sie den Fehler $|T_3 - I|$ ab. (2 Punkte)

$$a) \quad h = \frac{2 - (-1)}{3} = \frac{3}{3} = 1, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$$

$$T_3 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \log(-1+2) + \log(0+2) + \log(1+2) + \frac{1}{2} \log(2+2) \right) \\ = \frac{1}{2} \underbrace{\log 1}_{=0} + \log 2 + \log 3 + \frac{1}{2} \log 4 = \log 2 + \log 3 + \log 4^{\frac{1}{2}} \\ = \log(2 \cdot 3 \cdot 2) = \log 12$$

$$b) \quad |T_3 - I| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [-1, 2]} |f''(x)| \cdot \underbrace{|2 - (-1)|}_{=3} \\ \leq \frac{1}{4} \max_{x \in [-1, 2]} \left| -\frac{1}{(x+2)^2} \right| = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$