 Hochschule RheinMain
Rasa Steuding

Probeklausur mit Lösungshinweisen

Auf jede der folgenden acht Aufgaben werden maximal vier Punkte vergeben. Mit zwölf Punkten haben Sie sicher bestanden. Mit ≥ 20 *Punkten bekommen Sie eine* **1.0**. *Sie haben 90 Minuten Zeit und dürfen als Hilfsmittel nur eine auf einem A4 Blatt (beide Seiten) selbstgeschriebene Formelsammlung benutzen. Viel Erfolg!*

1. Aufgabe

a) Konvergieren oder divergieren die Folgen der a_n, b_n, c_n und d_n bei $n \to \infty$?

$$a_n := \frac{2n^2 + 3n - 7}{n^2 + 1}, \quad b_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k, \quad c_n := \exp(-5n^2) \quad \text{und} \quad d_n := \frac{2^n}{n!}.$$

b) Berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte in a).

Es gilt

$$a_n := \frac{2n^2 + 3n - 7}{n^2 + 1} = \frac{n^2(2 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}},$$

also konvergiert die Folge $(a_n)_n$ gegen 2.

Aus der bekannten Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

folgt

$$b_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 + n}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

und damit konvergiert die Folge $(b_n)_n$ gegen $\frac{1}{2}$.

Die Folge $(c_n)_n$ ist monoton fallend und beschränkt und weil $\exp(x)$ mit x gegen unendlich wächst, ist c_n konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Die Folgenglieder $d_n := \frac{2^n}{n!}$ treten als Summanden in der konvergenten Exponentialreihe $\exp(2)$ auf, also gilt $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

---

2. Aufgabe

Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\text{a)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} = O(1),$$

$$\text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(3^{\frac{-n}{2}} + 5^{\frac{-n}{2}}\right) = O(1).$$

Hinweis: untersuchen Sie die gegebenen Reihen auf Konvergenz!

---

a) Falsch. Wegen

$$\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n} \text{ für } n \geq 2$$

divergiert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ im Vergleich mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Damit gibt es keine Konstante $K \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \right| \leq K$$

gilt.

b) Richtig. Als die Summe von zwei konvergenten geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \left(3^{\frac{-n}{2}} + 5^{\frac{-n}{2}}\right)$ konvergent. Damit steht auf der linken Seite der Identität eine beschränkte Größe.

---

3. Aufgabe

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x \cdot \exp(-x^{2n}).$$

a) Ist f stetig? Ist f differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!
b) Bestimmen Sie (falls existent) die Extrema von f und entscheiden Sie gegebenenfalls, ob diese Minima oder Maxima sind.

---

a) Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist f differenzierbar und damit insbesondere stetig.

b) Im Falle $n = 0$, d.h. $f(x) = x$, liegen keine Extrema vor. Sei jetzt $n \neq 0$. Die erste Ableitung von f ergibt sich mit Ketten- und Produktregel als

$$f(x)' = (1 - 2nx^{2n}) \exp(-x^{2n}).$$

Da die Exponentialfunktion ohne Nullstellen ist, können Extrema höchstens in den Nullstellen des Faktors $1 - 2nx^{2n}$ auftreten. Mit Hilfe der zweiten Ableitung bzw. (leichter!) unter Berücksichtigung des Verhaltens

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \text{ bzw. } \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

sowie

$$f(-|x|) < 0 < f(|x|),$$

ergibt sich, dass in $x = -\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}$ ein absolutes Minimum und in $x = +\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}$ ein absolutes Maximum vorliegt (alle anderen Nullstellen von $1 - 2nx^{2n}$ sind nicht reell).

---

4. Aufgabe

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom T_2 der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
b) Zeigen Sie

$$\left|\cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1)\right| \leq \frac{1}{6}.$$

---

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, ist als Verkettung des Cosinus und eines Polynoms beliebig oft differenzierbar; mit der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \\ f''(x) &= -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \\ f'''(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$f(0) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f'(0) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } f''(0) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ergibt sich für das zweite Taylorpolynom T_2 von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Nach der Taylorformel gilt

$$f(x) = T_2(x) + R_3(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

insbesondere $f(1) = T_2(1) + R_3(1)$, wobei

$$R_3(1) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot 1^3 = \frac{1}{6}f'''(\xi) = \frac{1}{6}\sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)$$

mit einem ξ zwischen $x_0 = 0$ und $x = 1$. Damit ergibt sich

$$\left|\cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1)\right| = |f(1) - T_2(1)| = |R_3(1)| = \frac{1}{6}\left|\sin\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{6}.$$

---

5. Aufgabe

Sei $P(x) := (x-1)^2$ und $Q(x) := x \cdot (x-1)$.
a) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen on P und Q.
b) Bestimmen Sie jeweils die ersten drei Newton-Iterationen x_1, x_2 und x_3 mit dem Startwert $x_0 = \frac{3}{2}$. Welche Folge konvergiert schneller gegen die Nullstelle? Woran liegt es?

---

a) Das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ergibt für $f = P$ die Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-1)^2}{2(x_n-1)} = \frac{1}{2}(x_n+1)$$

und für $f = Q$ die Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(x_n-1)}{2x_n-1} = \frac{x_n^2}{2x_n-1}.$$

b) Damit erhält man die Werte $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{9}{8}$, $x_3 = \frac{17}{16}$ für $f = P$ und die Werte $x_1 = \frac{9}{8}$, $x_2 = \frac{81}{80}$, $x_3 = \frac{6561}{6560}$ für $f = Q$. Die Folge für Q konvergiert schneller zu der (einfachen) Nullstelle $x_Q = 1$. Bei $f = P$ handelt es um eine doppelte Nullstelle $x_P = 1$ ($P'(1) = 0$, $P''(1) \neq 0$), was die Ursache für lineare (statt quadratische) Konvergenz ist.

---

6. Aufgabe

a) Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{2\pi} (\sin(\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha.$$

b) Gesucht sind alle $\beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha \cdot \beta)\, \mathrm{d}\alpha = 0.$$

---

a) Die partielle Integration mit der Identität $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$ liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (\sin(\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha &= -\sin(\alpha)\cos(\alpha)|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (\cos(\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha \\
&= -\sin(\alpha)\cos(\alpha)|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (1-(\sin(\alpha))^2) \mathrm{d}\alpha \\
&= (-\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\alpha)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\sin(\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha,
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$2\int_0^{2\pi} (\sin(\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha = (-\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\alpha)|_0^{2\pi} = 2\pi \text{ bzw. } \int_0^{2\pi} (\sin(\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha = \pi.$$

Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}(\cos(\alpha))^2\mathrm{d}\alpha &= \int_0^{2\pi}(1-(\sin(\alpha))^2)\mathrm{d}\alpha\\ &= \int_0^{2\pi}1\mathrm{d}\alpha-\int_0^{2\pi}(\sin(\alpha))^2\mathrm{d}\alpha=\alpha|_0^{2\pi}-\pi=\pi.\end{aligned}$$

Mit der Substitution $a=\sin(\alpha)$ ergibt sich $\mathrm{d}a=\cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha$ und

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha &= \int_{\sin(0)}^{\sin(2\pi)}a\,\mathrm{d}a\\ &= \frac{1}{2}a^2|_0^0=0.\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\int_0^{2\pi}\cos(\alpha\beta)\,\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{\beta}\sin(\alpha\beta)|_{\alpha=0}^{2\pi}=\frac{1}{\beta}\sin(2\pi\beta).$$

Das Produkt $\frac{1}{\beta}\sin(2\pi\beta)$ verschwindet an der Nullstellen den Sinusfunktion, d.h. für alle $\beta\in\mathbb{Z}\backslash 0$.

---

7. Aufgabe

Was ist falsch an folgender Argumentation?

Wir zeigen, dass $1=2$. Es gilt $x=x$. Beide Seiten werden quadriert,

$$x^2=x^2,$$

und von beiden Seiten subtrahiert:

$$x^2-x^2=x^2-x^2.$$

Auf beiden Seiten werden nun folgende Umformungen durchgeführt:

$$x\cdot(x-x)=(x+x)\cdot(x-x).$$

Nun kann man $(x-x)$ kürzen. Daraus folgt $x=x+x$ und speziell für $x=1$ ergibt sich $1=1+1=2$.

Man darf nicht $(x-x)=0$ kürzen. (Division durch Null ist nicht erlaubt!)

---

8. Aufgabe

Es gilt
$$I := \int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \log(x^2+1).$$

a) Berechnen Sie eine Näherung T_4 für $\log(17)$ unter Verwendung der Trapezregel mit vier Teilintervallen.
b) Schätzen Sie den Fehler $|I - T_4|$ ab.

---

a) Es gilt
$$\log(17) = \log(4^2+1) = \int_0^4 \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$
Mit äquidistanter Intervallteilung von $[0,4]$ erhalten wir vier Teilintervallen der Länge $h = 1$ mit der Stützstellen $x_j = x_0 + hj$, $j = 0,\ldots,4$. Mit $y_j = \frac{2x_j}{x_j^2+1}$, $j = 0,\ldots,4$, folgt
$$T_4 = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right) = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 1 + \frac{4}{5} + \frac{6}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{17}\right) = \frac{224}{85}.$$

b) Nach der Fehlerabschätzungsformel für die Trapezregel gilt
$$\begin{aligned} |I - T_4| &\leq \frac{h^2}{12}\max_{x\in[0,4]}\left|\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)''\right|(4-0) \\ &= \frac{1}{3}\max_{x\in[0,4]}\left|\frac{4(x^3-3x)}{(1+x^2)^3}\right|. \end{aligned}$$
Nach der Untersuchung von Extrema der Funktion $\frac{4(x^3-3x)}{(1+x^2)^3}$ auf dem Intervall $[0,4]$, erhält man $\left|\frac{4(x^3-3x)}{(1+x^2)^3}\right| \leq 3$ und damit
$$|I - T_4| \leq 1.$$
