Hochschule RheinMain
Dr. Rasa Steuding

Probeklausur

Auf jede der folgenden acht Aufgaben werden maximal vier Punkte vergeben. Mit zwölf Punkten haben Sie sicher bestanden. Mit ≥ 20 *Punkten bekommen Sie eine* **1.0**. *Sie haben 90 Minuten Zeit und dürfen als Hilfsmittel nur eine auf einem A4 Blatt (beide Seiten) selbstgeschriebene Formelsammlung benutzen. Viel Erfolg!*

1. Aufgabe

a) Konvergieren oder divergieren die Folgen der a_n, b_n, c_n und d_n bei $n \to \infty$?

$$a_n := \frac{2n^2+3n-7}{n^2+1}, \quad b_n := \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k, \quad c_n := \exp(-5n^2) \quad \text{und} \quad d_n := \frac{2^n}{n!}.$$

b) Berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte in a).

2. Aufgabe

Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} = O(1),$$

$$\text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(3^{\frac{-n}{2}} + 5^{\frac{-n}{2}}\right) = O(1).$$

Hinweis: untersuchen Sie die gegebenen Reihen auf Konvergenz!

3. Aufgabe

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x \cdot \exp(-x^{2n}).$$

a) Ist f stetig? Ist f differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!
b) Bestimmen Sie (falls existent) die Extrema von f und entscheiden Sie gegebenenfalls, ob diese Minima oder Maxima sind.

4. Aufgabe

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom T_2 der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
b) Zeigen Sie

$$\left|\cos\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - T_2(1)\right| \leq \frac{1}{6}.$$

5. Aufgabe

Sei $P(x) := (x-1)^2$ und $Q(x) := x \cdot (x-1)$.
a) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen on P und Q.
b) Bestimmen Sie jeweils die ersten drei Newton-Iterationen x_1, x_2 und x_3 mit dem Startwert $x_0 = \frac{3}{2}$. Welche Folge konvergiert schneller gegen die Nullstelle? Woran liegt es?

6. Aufgabe

a) Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha, \quad \int_0^{2\pi} (\sin(\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha.$$

b) Gesucht sind alle $\beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha \cdot \beta)\, \mathrm{d}\alpha = 0.$$

7. Aufgabe

Was ist falsch an folgender Argumentation?

Wir zeigen, dass $1 = 2$. Es gilt $x = x$. Beide Seiten werden quadriert,

$$x^2 = x^2,$$

und von beiden Seiten subtrahiert:

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2.$$

Auf beiden Seiten werden nun folgende Umformungen durchgeführt:

$$x \cdot (x - x) = (x + x) \cdot (x - x).$$

Nun kann man $(x - x)$ kürzen. Daraus folgt $x = x + x$ und speziell für $x = 1$ ergibt sich $1 = 1 + 1 = 2$.

8. Aufgabe

Es gilt

$$I := \int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\, \mathrm{d}t = \log(x^2+1).$$

a) Berechnen Sie eine Näherung T_4 für $\log(17)$ unter Verwendung der Trapezregel mit vier Teilintervallen.
b) Schätzen Sie den Fehler $|I - T_4|$ ab.