Lösungsvorschläge für 14. Übungsblatt

14.1 a) $y' = y^2, \quad y(1) = 1$

- $y = 0$ ist partikuläre Lösung
- Für $y \neq 0$ Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + C, \; C \in \mathbb{R}$$

nichttrivialen Lösungen $\exists$ nur für $x < -C$ oder $x > -C$

Allgemeine Lösung: $\quad y(x) = -\dfrac{1}{x+C}, \quad x \neq -C$

- AWP: $1 = y(1) = -\dfrac{1}{1+C} \Rightarrow 1 + C = -1 \Rightarrow C = -2$

$$y(x) = -\frac{1}{x-2}, \quad x < 2$$

(Anfangswert $x_0 = 1$ liegt in $(\infty, 2)$)

b) $y' = \dfrac{1-y^2}{x}, \quad y(1) = -2.$

- Partikuläre Lösungen sind $y(x) = \pm 1$
- Für $x \neq 0$, $y^2 \neq 1$ Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{x}$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\left(\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1+y)(1-y)} = \frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A - Ay + B + By}{(1+y)(1-y)} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \right)$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1-y} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{1+y} - \int \frac{dy}{y-1} \right) = \frac{1}{2}\left(\log|1+y| - \log|y-1| \right)$$

$$= \log \sqrt{\left| \frac{y+1}{y-1} \right|}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x|$$

Allgemeine Lösung:

$$\log \sqrt{\left| \frac{y+1}{y-1} \right|} = \log|x| + c$$

$$\left| \frac{y+1}{y-1} \right| = (e^c)^2 \cdot |x|^2 = e^{2c} \cdot x^2$$

$\circ$ AWP: $\left|\frac{-2+1}{-2-1}\right| = e^{2c} \cdot 1^2 \Rightarrow 3^{-1} = e^{2c} \Rightarrow 2c = \log\frac{1}{3}$

$c = \log\sqrt{\frac{1}{3}}$

$$\left|\frac{y+1}{y-1}\right| = \frac{1}{3}x^2$$

$$\frac{y+1}{y-1} = \frac{1}{3}x^2 \quad \left(\frac{y+1}{y-1} > 0 \text{ für } y<-1\right)$$

$$y+1 = \frac{1}{3}x^2(y-1)$$

$$y+1 = +\frac{1}{3}x^2 y - \frac{1}{3}x^2$$

$$y - \frac{1}{3}yx^2 = -\frac{1}{3}x^2 - 1$$

$$y\left(1-\frac{1}{3}x^2\right) = -\frac{1}{3}x^2 - 1$$

$$y(x) = \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{-\frac{1}{3}x^2 + 1}$$

2. $y'y(x^2+1) + x(y^2+1) = 0, \quad y(0) = 1$

$$y'y(x^2+1) = -x(y^2+1)$$

$$\frac{y}{y^2+1} \cdot y' = -\frac{x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{2y}{y^2+1}\,dy = -\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Substitution: $a = y^2+1, \; da = 2y\,dy$

$$\int \frac{da}{a+1} = -\int \frac{db}{b+1}$$

$$\log|a+1| = -\log|b+1| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\log(y^2+1) = -\log(x^2+1) + C$$

AWP: $y(0)=1 \Leftrightarrow \log(1^2+1) = -\log(0^2+1)+c$ (3.)

$\Leftrightarrow \underline{\log 2 = c}$

$$\log(y^2+1) = -\log(x^2+1) + \log 2 = \log\frac{2}{x^2+1}$$

$$y^2+1 = \frac{2}{x^2+1}$$

$$y^2 = \frac{2}{x^2+1} - 1 = \frac{2-x^2-1}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\underline{\underline{y = +\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}} \quad \left(\begin{matrix}\text{wegen} \\ y(0)=1\end{matrix}\right)$$

Folglich ist

$$y: D_y \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

Da die Wurzelfkt. auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert und stetig, aber nur auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist, beinhaltet das maximale Definitionsintervall $\underset{\sim}{D_y}$ genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Also $\underset{\sim}{D_y} = (-1,1)$.

3. $\frac{dT(t)}{dt} = -k\left(T_0 - T(t)\right)$

Sei $t=0$ um 00:00. Wir messen die Zeit in Std.

$$\frac{dT}{dt} = -k(18-T), \quad T(0)=28, \quad T(0{,}5)=26$$

Wir wollen wissen, wann $T(t)=37$ war.

$$\int \frac{dT}{18-T} = -\int k\,dt \implies \log|18-T| = -kt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\log(T-18) = -kt + C \quad (T > T_0 = 18)$$

$$e^{\log(T-18)} = e^{-kt+C}$$

$$T-18 = e^{-kt+C}$$

$$T = 18 + \underbrace{e^C}_{B} \cdot e^{-kt} = 18 + B \cdot e^{-kt}$$

$$T(0)=28 \implies 28 = 18 + B \quad (I)$$

$$T(0.5)=26 \implies 26 = 18 + B\cdot e^{-\frac{k}{2}} \quad (II)$$

Aus (I) folgt $B=10$. Damit aus (II) folgt

$$10\, e^{-\frac{k}{2}} = 8$$

$$e^{-\frac{k}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$-\frac{k}{2} = \log\frac{4}{5}$$

$$k = -2\log\frac{4}{5}$$

Daher

$$T(t) = 18 + 10\cdot e^{-(-2\log\frac{4}{5})t} = 18 + 10\cdot\left(\frac{16}{25}\right)^t.$$

Ferner gilt

$$18 + 10\cdot\left(\frac{16}{25}\right)^t = 37 \implies \left(\frac{16}{25}\right)^t = \frac{19}{10} \implies t = \frac{\log\frac{19}{10}}{\log\frac{16}{25}} \approx -1.44$$

Also c.a. 1 Std 26 Min vor Mitternacht lebte der Opfer noch.