

Lösungsvorschläge für 13. Übungsblatt

1

1. • Als Polynomfunktion ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$\bullet \operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$$

und

$$\bullet H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

• Notwendige Bedingung für lokale Extrema (x,y) von f ist, dass

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

Wegen $x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ sind genau die Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ Kandidaten für lokale Extrema.

• Die Matrix

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, denn:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f(1,1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \rightarrow$$

(2)

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6x-3y \\ -3x+6y \end{pmatrix} \right\rangle = 6x^2 - 3yx + (-3xy + 6y^2) \\ &= 6x^2 - 6xy + 6y^2 = 6(x^2 - xy + y^2) \stackrel{\substack{\text{kvadratische} \\ \text{Ergänzung}}}{=} 6\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2 + y^2\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0 \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Daher besitzt f in $(1, 1)$ ein lokales Minimum.

Für die Matrix

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3y \\ -3x \end{pmatrix} \right\rangle = -3xy - 3yx = -6xy.$$

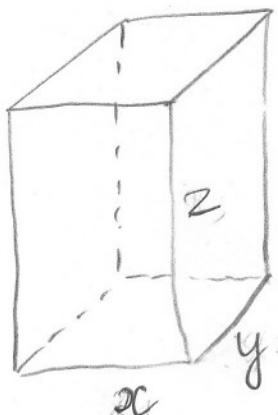
und mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -6 \cdot 2 \cdot 2 = -24 < 0 < \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -6 \cdot (-2) \cdot 2 = 24.$$

Damit ist die Matrix $H_f(0,0)$ indefinit und daher besitzt f in $(0,0)$ kein lokales Extremum.

• $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ besitzt in der Nähe von $(0,1)$ die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} f(0+\xi_1, 1+\xi_2) &= f(0,1) + \langle \text{grad} f(0,1), \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, H_f(0,1) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle + o\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right\|^2\right) \\ &= 1 + (-3, 3) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + o(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\ &= 1 + (-3\xi_1 + 3\xi_2) + \frac{1}{2} (\xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} -3\xi_2 \\ -3\xi_1 + 6\xi_2 \end{pmatrix} + o(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\ &= 1 - 3(\xi_1 - \xi_2) - \frac{3}{2}(\xi_1 \xi_2 + \xi_2 \xi_1 + 2\xi_2^2) + o(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\ &= 1 - 3(\xi_1 - \xi_2) - 3(\xi_1 \xi_2 - \xi_2^2) + \text{Fehler}. \end{aligned}$$



$V = xyz$

Da $(x+y+z) \cdot 4 = 1 \Rightarrow$ die Kantenlängen sind x, y und $z = \frac{1}{4} - (x+y)$

Das Volumen ist

$$V = xyz = xy\left(\frac{1}{4} - (x+y)\right).$$

Wir untersuchen die Funktion $V(x,y) := xy\left(\frac{1}{4} - (x+y)\right) = \frac{1}{4}xy - x^2y - xy^2$ auf Maxima.

$$\bullet \text{ grad } V(x,y) = \left(\frac{1}{4}y - 2xy - y^2, \frac{1}{4}x - 2xy - x^2\right) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}y - 2xy - y^2 = 0 \\ \frac{1}{4}x - 2xy - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}(y-x) - (y^2-x^2) = 0 \\ \frac{1}{4}x - 2xy - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}(y-x) - (y^2-x^2) = \frac{1}{4}(y-x) - (y-x)(y+x) = (y-x)\left(\frac{1}{4} - x - y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y-x=0 \vee \frac{1}{4} - x - y = 0$$

$$\underline{y=x} \vee \underline{y = \frac{1}{4} - x}$$

$$\text{Wegen } \frac{1}{4}x - 2x \cdot x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{4} - 3x\right) = 0 \\ \Leftrightarrow x=0 \vee x = \frac{1}{12}$$

$$\text{und } \frac{1}{4}x - 2 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{4} - x\right) - x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x - 3x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x=0 \vee x = \frac{1}{12}$$

Sind die Punkte $(0,0)$, $(\frac{1}{12}, \frac{1}{12})$, $(0, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$ kritische Punkte.

Weil die Kantenlänge > 0 ist, bleiben nur die Punkte $(\frac{1}{12}, \frac{1}{12})$ und $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$. Da $V(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right)\right) = \frac{1}{144} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{1728}$

größer ist als $V(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right)\right) = 0$,

sind die optimalen Kantenlängen $x = \frac{1}{12}, y = \frac{1}{12}, z = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}$.