Lösungsvorschläge für 12. Übungsblatt

12.1. Die Funktion

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x+y^2>0, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

ist als rationale Verkettung stetiger Funktionen in allen Punkten $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ stetig, für die der Nenner nicht verschwindet, also für $(x,y)\neq(0,0)$ (denn $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$)

Wir berechnen die Grenzwerte $f\left(\pm\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ bei $k\to\infty$:

$$f\left(\pm\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = \frac{\pm\frac{1}{k^2}}{\left(\pm\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{\pm\frac{1}{k^2}}{2\cdot\frac{1}{k^2}} = \pm\frac{1}{2};$$

somit existiert kein eindeutiger Grenzwert in $\lim_{k\to\infty}\left(\pm\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)=(0,0)$ und also ist f (nach Satz 12.2) in $(x,y)=(0,0)$ (unabhängig von $f(0,0)=0$) nicht stetig.

12.2 Die Funktion

$$(x,y)\mapsto f(x,y) = \cos(xy^2)$$

ist als Verkettung beliebig oft differenzierbarer Funktionen beliebig oft partiell differenzierbar; diese partielle Ableitungen sind dabei insbesondere stetig (weil sogar differenzierbar) und die Aussage des Satzes von Schwarz ist erfüllt. Dies zeigen auch folgende Berechnungen:

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f = -y^2\sin(xy^2),$$

Kettenregel

$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f = -2xy\sin(xy^2),$$

Produktregel

sowie

$$D_1D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} D_1 f = -y^4\cos(xy^2),$$

$$D_2D_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} D_1 f = -2y\sin(xy^2) - 2xy^3\cos(xy^2),$$

$$D_1D_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} D_2 f = -2y\sin(xy^2) - 2xy^3\cos(xy^2),$$

$$D_2D_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} D_2 f = -2x\sin(xy^2) - 4x^2y^2\cos(xy^2).$$

12.3 Die Betragsfunktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = |t|$, ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar; damit ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = |x-y| \cdot y,$$

zunächst an allen Stellen $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a \neq b$ partiell differenzierbar. Es bleiben also nur noch die Punkte (a,a) mit $a \in \mathbb{R}$ der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten zu untersuchen:

- Für den Differenzenquotienten der Funktion

$$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = f(x,a) = |x-a| \cdot a,$$

an der Stelle $x = a$ gilt

$$\frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} = \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \frac{|h| \cdot a - 0}{h} = \frac{|h|}{h} \cdot a$$

für alle $h \neq 0$. Wegen

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} \cdot a \underset{h>0}{=} a$$

und

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} \cdot a \underset{h<0}{=} -a$$

ist f_1 an der Stelle $x = a$ genau dann differenzierbar, wenn $a = -a$ gilt, $\frac{\partial}{\partial x} f(a,a)$ existiert also genau im Falle $a = 0$.

- Analog: die Funktion

$$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(y) = f(a,y) = |a-y| \cdot y$$

ist an der Stelle $y = a$ genau dann differenzierbar, wenn $a = -a$ gilt, $\frac{\partial}{\partial y} f(a,a)$ existiert also genau im Falle $a = 0$.

Damit ist die Funktion f an den vom Nullpunkt $(0,0)$ verschiedenen Punkten der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten nicht partiell differenzierbar.