Lösungsvorschläge für 11. Übungsblatt

11.1. Gegeben: $P_0=(-1,2)$, $P_1=(1,10)$, $P_2=(3,12)$

Gesucht: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ mit $p(-1)=2$, $p(1)=10$, $p(3)=12$.

- $$\begin{cases} a_0+a_1\cdot(-1)+a_2\cdot(-1)^2=2 \\ a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1^2=10 \\ a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0-a_1+a_2=2 \quad (-1) \\ a_0+a_1+a_2=10 \\ a_0+3a_1+9a_2=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_0-a_1+a_2=2 \\ 2a_1=8 \quad (-2) \\ 4a_1+8a_2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0-a_1+a_2=2 \\ a_1=4 \\ 8a_2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=2+a_1-a_2=2+4+\frac{3}{4}=\frac{27}{4} \\ a_1=4 \\ a_2=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$p(x)=\frac{27}{4}+4x-\frac{3}{4}x^2$$

- Interpolationspolynom von Lagrange: (Satz 11.1)

$p_0(x)=y_0=2$

$$p_1(x)=p_0(x)+(y_1-p_0(x_1))\cdot\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=2+(10-2)\cdot\frac{x-(-1)}{1-(-1)}=2+8\cdot\frac{x+1}{2}=4x+6$$

$$p(x)=p_2(x)=p_1(x)+(y_2-p_1(x_2))\cdot\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=4x+6+(12-(4\cdot 3+6))\cdot\frac{x-(-1)}{3-(-1)}\cdot\frac{x-1}{3-1}$$

$$=4x+6-6\cdot\frac{x+1}{4}\cdot\frac{x-1}{2}=4x+6-\frac{3}{4}(x^2-1)=-\frac{3}{4}x^2+4x+6+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{27}{4}+4x-\frac{3}{4}x^2$$

- Interpolationspolynom von Newton (äquidistante Stützstellen)

$$h=\frac{3-(-1)}{2}=2$$

$$p(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$=2+\frac{10-2}{2}(x-(-1))+\frac{(12-10)-(10-2)}{2\cdot 2^2}(x-(-1))(x-1)$$

$$=2+4(x+1)+\frac{2-8}{8}\cdot(x+1)(x-1)$$

$$=2+4x+4-\frac{6}{8}(x^2-1)=6+4x-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}=\frac{27}{4}+4x-\frac{3}{4}x^2$$