Lösungsvorschlag für 10. Übungsblatt

10.1 a) Bitte siehe Aufgabe 9.2.

b) Es ist

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und} \quad f'''(x) = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Damit erhält man

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = -\frac{x^2}{2}.$$

Für $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ gilt

$$|R_2(x)| = |f(x) - T_2(x)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-0)^3\right|$$

$$\le \frac{1}{3\cos^2(\pi/4)} \tan\frac{\pi}{4}\cdot x^3 = \frac{2}{3}x^3.$$

10.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad x = 0.1234501$, $\quad \tilde{x} = 0.1\underbrace{2345}_{\text{bis 5 Stellen runden}}$

Für den relativen Fehler bei Funktionsauswertung gilt:

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \le K \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| \quad \text{mit } K \le \frac{\max\limits_{u\in[\tilde{x},x]}|f'(u)| \max\limits_{u\in[\tilde{x},x]}|u|}{\min\limits_{u\in[\tilde{x},x]}|f(u)|}.$$

Mit $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ erhält man

$$K = \frac{\max\limits_{u\in[\tilde{x},x]}\left|\frac{1}{2\sqrt{u}}\right| \cdot \max\limits_{u\in[\tilde{x},x]}|u|}{\min\limits_{u\in[\tilde{x},x]}|\sqrt{u}|} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\tilde{x}}}\cdot x}{\sqrt{\tilde{x}}} = \frac{x}{2\tilde{x}}.$$

Damit

$$\underbrace{\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right|}_{=0.28461\cdot 10^{-6}} \le \frac{\cancel{x}}{2\cdot\tilde{x}}\cdot\frac{|\tilde{x}-x|}{\cancel{x}} = \frac{|\tilde{x}-x|}{2\tilde{x}} = \frac{1\cdot 10^{-7}}{2\cdot 0.12345}$$

$$= 0.40502\cdot 10^{-6}$$

10.3.

$$K_f(x) := \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right| \leftarrow \text{Kondition der Funktion } f(x)$$

a) $\underbrace{f(x) = 42 \cdot x}$

$$K_f(x) = \left| \frac{x \cdot 42}{42 \cdot x} \right| = 1$$

keine Zunahme des relativen Fehlers
(gut konditioniert)

b) $\underbrace{f(x) = 42 - x}$

$$K_f(x) = \left| \frac{x}{42-x} \cdot (-1) \right| = \left| \frac{x}{42-x} \right|$$

für $x \approx 42$ schlecht konditioniert, denn $\left| \frac{x}{42-x} \right|$ beliebig groß werden kann.

c) $\underbrace{f(x) = 3\exp(x) - 3}$

$$K_f(x) = \left| \frac{x}{3e^x - 3} \cdot 3e^x \right| = \left| \frac{x e^x}{e^x - 1} \right|$$

- gut konditioniert für $\underline{x \approx 0}$, denn

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} \right| = \left| \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} \right| \underset{\text{l'Hospital}}{=} \left| \lim_{x \to 0} \frac{e^x + x \cdot e^x}{e^x} \right|$$

$$= \left| \lim_{x \to 0} (1 + x) \right| = 1$$

- zunehmender relativer Fehler für $\underline{x \to \infty}$, denn

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} \right| = \infty \text{ (schlecht konditioniert)}$$

10.4. • Es gilt $gl(x) = x(1+\varepsilon)$ mit $|\varepsilon| \le \varepsilon_M$,

$$gl(\exp(x)) = \exp(x)(1+\varepsilon) \quad -\text{"}- ,$$
$$gl(y-x) = (y-x)(1+\varepsilon) \quad -\text{"}- ,$$
$$gl(y/x) = (x/y)\cdot(1+\varepsilon) \quad -\text{"}- .$$

Damit für die f-Auswertung gilt:

$$gl(f(x)) = \frac{\left(e^{x}(1+\varepsilon_1) - e^{-x}(1+\varepsilon_2)\right)(1+\varepsilon_3)}{3} \cdot (1+\varepsilon_4)$$

$$= \frac{e^{x}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4) - e^{-x}(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}{3}$$

$$= \frac{e^{x}(1+\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4) - e^{-x}(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}{3}$$

(ε_j, $j=1,2,3,4$, sind Rundungsfehler im Bereich der Maschinengenauigkeit ε_M; Terme $\varepsilon_i\varepsilon_j$ können vernachlässigt werden.)

• Daher folgt für den relativen Fehler:

$$\left|\frac{f(x) - gl(f(x))}{f(x)}\right| = \left|\frac{(e^{+x} - e^{-x}) - \left(e^{x}(1+\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4) - e^{-x}(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)\right)}{e^{x} - e^{-x}}\right|$$

$$= \left|\frac{e^{x}(\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4) - e^{-x}(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}{e^{x}-e^{-x}}\right|$$

$$\le \frac{|e^{x}|\cdot 3\varepsilon_M + |e^{-x}|\cdot 3\cdot\varepsilon_M}{|e^{x}-e^{-x}|} = 3\varepsilon_M \frac{e^{x}+e^{-x}}{|e^{x}-e^{-x}|}$$

mit $|\varepsilon_j| \le \varepsilon_M$.

• $3\varepsilon_M \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{|e^{x}-e^{-x}|} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty \implies$ die Auswertung ist für $x \approx 0$ instabil.

• $\lim\limits_{x\to\infty} 3\varepsilon_M \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{|e^{x}-e^{-x}|} = \lim\limits_{x\to\infty} 3\cdot\varepsilon_M \dfrac{(1+e^{-2x})e^{-x}}{|1-e^{-2x}||e^{-x}|} = \lim\limits_{x\to\infty} 3\varepsilon_M \dfrac{1+e^{-2x}}{|1-\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}|} = 3\varepsilon_M$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} 3\varepsilon_M \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{|e^{x}-e^{-x}|} = 3\varepsilon_M$ (analog!) $\implies$ Für große $|x|$ ist die Auswertung stabil.

Es gilt 10.5 a)

$$gl(f(x)) = \Big(\big((x-1)(1+\varepsilon_1)\big)^2(1+\varepsilon_2) - \big((x+1)(1+\varepsilon_3)\big)^2(1+\varepsilon_4)\Big)(1+\varepsilon_5).$$

Daraus folgt für den relativen Fehler:

$$\left|\frac{gl(f(x)) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{\Big((x-1)^2(1+2\varepsilon_1+\varepsilon_1^2)(1+\varepsilon_2) - (x+1)^2(1+2\varepsilon_3+\varepsilon_3^2)(1+\varepsilon_4)\Big)(1+\varepsilon_5)}{(x-1)^2-(x+1)^2} - 1\right|$$

$$= \left|\frac{(x-1)^2(2\varepsilon_1+\varepsilon_2) - (x+1)^2(2\varepsilon_3+\varepsilon_4) + \varepsilon_5\big((x-1)^2-(x+1)^2\big)}{(x-1)^2-(x+1)^2}\right|$$

Die Terme $\varepsilon_i\varepsilon_j$ und $\varepsilon_i\varepsilon_j^2$ wurden vernachlässigt

$$= \left|\frac{(x-1)^2(2\varepsilon_1+\varepsilon_2) - (x+1)^2(2\varepsilon_3+\varepsilon_4)}{(x-1)^2-(x+1)^2} + \varepsilon_5\right|$$

Für $x \approx 0$ wird der relative Fehler groß.

Nach dem Ausmultiplizieren folgt

$$f(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2 = \big(\underbrace{x-1-(x+1)}_{-2}\big)\big(\underbrace{x-1+(x+1)}_{2x}\big) = -4x.$$

Daher für den relativen Fehler gilt:

$$\left|\frac{(-4x)(1+\varepsilon) - (-4x)}{-4x}\right| = |\varepsilon|$$

Ferner gilt

$$\kappa_f(x) = \left|\frac{x\cdot(-4)}{4x}\right| = 1.$$

Damit ist $f(x) = -4x$ gut konditioniert und kann mit kleinen Fehler berechnet werden.

b) Es gilt

$$gl(f(x)) = gl(e^x - 1 - x) = \big((e^x(1+\varepsilon_1) - 1)(1+\varepsilon_2) - x\big)(1+\varepsilon_3)$$

$$\overset{!}{=} \big((e^x + e^x\varepsilon_1 - 1)(1+\varepsilon_2) - x\big)(1+\varepsilon_3)$$

$$= (e^x + e^x\varepsilon_1 - 1 + e^x\varepsilon_2 - \varepsilon_2 - x)(1+\varepsilon_3)$$

$$= e^x + e^x\varepsilon_1 - 1 + e^x\varepsilon_2 - \varepsilon_2 - x + e^x\varepsilon_3 - \varepsilon_3 - x\varepsilon_3$$

$$= e^x + e^x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 1 - x - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - x\varepsilon_3.$$

(die Terme $\varepsilon_i\varepsilon_j$ wurden vernachlässigt)

und $f(x)$

$$\left|\frac{gl(f(x)) - f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{e^x(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - x\varepsilon_3}{e^x - 1 - x}\right|$$

$$= \left|\frac{e^x\varepsilon_3 - x\varepsilon_3 - \varepsilon_3 + e^x(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - \varepsilon_2}{e^x - 1 - x}\right|$$

$$= \left|\varepsilon_3 + \frac{e^x(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - \varepsilon_2}{e^x - 1 - x}\right|.$$

Für $x \approx 0$ wird der relative Fehler groß. Ein stabiles Verfahren kann man durch die Reihenentwicklung von e^x konstruieren.

Mehr zu den Aufgaben 10.3-5 — am kommenden Donnerstag!