Numerische Verfahren und Grundlagen der Analysis

Rasa Steuding

Hochschule RheinMain Wiesbaden

Wintersemester 2011/12

3. Funktionen. Grenzwerte. Stetigkeit

Funktionen

Zu beliebigen Mengen D und W versteht man unter einer **Funktion** (bzw. Abbildung) $f : D \to W$ eine Vorschrift, die jedem $x \in D$ einen(!) bestimmten Punkt $y = f(x) \in W$ als **Funktionswert** zuordnet. D heißt dabei **Definitions-** und W **Wertebereich**.

Beispiele:

- konstante Funktion: zu $c \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = c; \end{aligned}$$

- die identische Abbildung

$$\begin{aligned} id \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x; \end{aligned}$$

- der reelle Absolutbetrag

$$\begin{aligned} abs \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto |x|. \end{aligned}$$

Polynome

Zu $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, heißt

$$\begin{aligned} p \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

Polynom (n-ten Grades).

Satz 3.1 (Fundamentalsatz der Algebra)

Über $\mathbb{C}$ kann jedes nicht konstante Polynom $p(x)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ in der Form

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j) = a_n (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

geschrieben werden.

Beispiel: $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$.

Rationale Funktionen

Etwas allgemeiner versteht man unter dem Quotienten zweier Polynome eine **rationale Funktion**:

$$\begin{aligned} r \quad : \quad & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}, \end{aligned}$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind und $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Eine Stelle x_0 heißt **Polstelle** einer rationalen Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, falls die Funktion r bei x_0 unbeschränkt ist.

Die rationale Funktion $r(x)$ hat bei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Polstelle, wenn entweder

- $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) \neq 0$ oder
- $q(x_0) = 0$ und $p(x_0) = 0$ und die Vielfachheit der Nullstelle des Nenners ist größer als diese des Zählers.

Satz 3.2

Zu vorgegebenen **Stützstellen** (x_j, y_j), $0 \le j \le n$, *gibt es genau ein* **Interpolations Polynom** $P_n(x)$ *vom Grad höchstens* n, *das* $P(x_j) = y_j$ *erfüllt. Es kann rekursiv über*

$$\begin{aligned} P_0(x) &= y_0 \\ P_{k+1}(x) &= P_k(x) + (y_{k+1} - P_k(x_{k+1})) \prod_{j=0}^{k} \frac{x - x_j}{x_{k+1} - x_j} \end{aligned}$$

ermittelt werden.

Die Aufgabe, durch vorgegebene Punkte ein Polynom zu legen, heißt **Interpolation**.

Beispiel

Wir bestimmen das Polynom vom Grad 2, das durch die Punkte $(0,1)$, $(2,3)$ und $(3,0)$ geht:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= P_0(x) + (y_1 - P_0(x_1)) \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\
&= 1 + (3-1) \cdot \frac{x-0}{2-0} = 1 + x \\
P_2(x) &= P_1(x) + (y_2 - P_1(x_2)) \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\
&= 1 + x + (0-4) \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-2}{3-2} \\
&= -\frac{4}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 1.
\end{aligned}
$$

"Secret Sharing" (Shamir, 1979)

Angemommen, man möchte ein Geheimnis s auf n Personen verteilen. Man wählt ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ vom Grad $n-1$ mit $a_0 = s$ und zufälligen Koeffizienten a_k, $1 \leq k \leq n-1$. Nun verteilt man die Funktionswerte $y_k = p(k)$, $1 \leq k \leq n$ an n Personen, die sich das Geheimnis teilen sollen.

Alle zusammen können mittels Interpolation aus Wertepaaren (k, y_k), $1 \leq k \leq n$ das Polynom $p(x)$ und damit das Geheimnis $s = p(0)$ rekonstruieren. Fehlt auch nur eine Person, so ist die Rekonstruktion nicht möglich.

Man kann auch das Geheimnis so verteilen, dass $r \leq n$ Personen (mit einem zuvor festgelegtem r) ausreichen, um das Geheimnis zu rekonstruieren.

Grenzwert einer Funktion.I

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wenn für jede Folge $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to y_0$, dann nennt man y_0 den **Grenzwert von** f **für** x **gegen** x_0 und schreibt dafür

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

(Wie bei Folgen ist $y_0 = \pm\infty$ erlaubt.)

Beispiele:

- für den reellen Absolutsbetrag gilt $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, denn mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ gilt insbesondere $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = 0$;
- für die rationale Funktion $r(x) = \frac{1}{x}$ gilt $\lim\limits_{x \to a \neq 0} r(x) = \frac{1}{a}$, denn mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n} = \frac{1}{a}$.

Grenzwert einer Funktion.II

Manchmal ist es notwendig zu unterscheiden, ob man sich von links ($x < x_0$) oder von rechts ($x > x_0$) nähert. In diesem Fall spricht man, wenn sie existeren, vom **linksseitigen Grenzwert** bzw. vom **rechtsseitigen Grenzwert**. Schreibweise:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) \text{ bzw. } \lim_{x \to x_0 +} f(x).$$

Beispiel:

- für die rationale Funktion $r(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$\lim_{x \to a \neq 0} r(x) = \frac{1}{a}, \quad \lim_{x \to 0-} r(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} r(x) = +\infty.$$

Der Grenzwert existiert genau dann, wenn links-und rechtsseitiger Grenzwerte existieren und gleich sind.

Aus den Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Folgen ergeben sich die analogen Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Funkionen.

Stetigkeit einer Funktion

Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$, dann heißt f **stetig im Punkt** a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

f heißt **stetig in** D, falls f im jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Beispiele:

- Offensichtlich sind konstante Funkionen und auch die Identität stetig;
- Ferner ist $r(x) = \frac{1}{x}$ stetig für $x \neq 0$, nicht aber in $x = 0$;
- Jedes Polynom ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig (klar!);
- $f(x) = |x|$ ist stetig, denn für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{x \to x_0} |x| = |x_0|$.

Sind $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt x_0, so sind auch Summe $f(x) + g(x)$, Produkt $f(x)g(x)$, Quotient $f(x)/g(x)$ (falls $g(x_0) \neq 0$) und **Komposition** $f(g(x))$ (falls definiert) stetig in x_0.

Zwischenwertsatz

Satz 3.3

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion mit*

$$f(a) < 0 < f(b) \quad (\textit{bzw. } f(b) < 0 < f(a)).$$

Dann besitzt f *eine Nullstelle in* (a, b)*, d.h. es gibt ein* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f(\xi) = 0$.

Dieser Satz angewendet auf $g(x) = f(x) - c$ ergibt

Korollar 3.1

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $c \in \mathbb{R}$ *genüge* $f(a) < c < f(b)$*. Dann existiert ein* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f(\xi) = c$.

Die Exponentialfunktion ist wie folgt definiert

$$\begin{aligned} r \quad : \quad & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Satz 3.4

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die **Exponentialreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ *absolut konvergent.*

Beweis mit dem Quotientenkriterium. Mit $a_n = \frac{x^n}{n!}$ gilt für $x \neq 0$ (der Fall $x = 0$ ist trivial) und $n \geq 2|x|$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2}.$$

Die Exponentialfunktion. II

Satz 3.5 (Funktionalgleichung)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Korollar 3.2

Für alle $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$0 < \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}.$$

Insbesondere besitzt die Exponentialfunktion keine Nullstelle (denn für $x \geq 0$ gilt $\exp(x) = 1 + x + \cdots \geq 1 > 0$).

Ferner ist die Exponentialfunktion in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig.

Die Exponentialfunktion. III

Die Exponentialreihe eignet sich wunderbar die Exponentialfunktion zu **approximieren**. Es gilt

$$\left|\exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right| < 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Ferner zeigt man mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{Z}$

$$\exp(x) = e^n,$$

wobei

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\ldots$$

die *Eulersche Zahl* ist.

Die Umkehrfunktion

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sagen wir

$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{monoton wachsend,} & \text{falls } f(x) \leq f(y), \\ \text{streng monoton wachsend,} & \text{falls } f(x) < f(y), \\ \text{monoton fallend,} & \text{falls } f(x) \geq f(y), \\ \text{streng monoton fallend,} & \text{falls } f(x) > f(y), \end{cases}$$

für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

Satz 3.6

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monton wachsende (!) (bzw streng monoton fallende) Funktion. Dann bildet f das Intervall D bijektiv auf das Intervall $D' = f(D)$ ab, und die **Umkehrfunktion** *$f^{-1} : D' \to D$, definiert durch*

$$f^{-1}(y) = x \text{ für } f(x) = y,$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ := \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$. Die Umkehrfunktion, der **natürliche Logarithmus**:

$$\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

ist stetig, streng monoton wachsend und genügt die Funkionalgleichung

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Allgemeiner erhält man für $a > 0$ die Exponentialfunktion zur Basis a auf $\mathbb{R}$ vermöge

$$\exp_a(x) := a^x := \exp(x \log a);$$

die Umkehrfunktion heißt **Logarithmus zur Basis** a und wird mit $\log_a(x)$ bezeichnet. Exponenten bzw. Logarithmen zu verschiedenen Basen lassen sich leicht in einander umrechnen (so dass es genügt, nur exp bzw. log zu betrachten).

Die Exponentialfunktion komplexer Zahlen

Die Begriffe der 'konvergenten' bzw. 'absolut konvergenten unendlichen Reihe' reeller Zahlen übertragen sich auf ihre komplexen Pendants. Ebenso beweist man beispielsweise das Quotientenkriterium für unendliche Reihen komplexer Zahlen. Damit zeigt sich dann u.a. auch die absolute Konvergenz der Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

für beliebiges $z \in \mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$. Auch gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp w$$

für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$. Insbesondere besitzt also exp keine Nullstellen in $\mathbb{C}$. Ferner ist exp in ganz $\mathbb{C}$ stetig. **Neu:** Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$, wobei $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

Trigonometrische Funktionen. I

Wir definieren **Cosinus** cos bzw. **Sinus** sin für $x \in \mathbb{R}$ vermöge

$$\cos(x) = \operatorname{Re}\exp(ix) \text{ bzw. } \sin(x) = \operatorname{Im}\exp(ix).$$

Damit gilt also die **Eulersche Formel**

$$\exp(ix) = cos(x) + i\sin(x).$$

Aus dieser Formel ergibt sich unmittelbar:

Satz 3.7

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

- $\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$, $\sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$,
- $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = \sin(x)$,
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Ferner sind $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Die Reihendarstellung von cos und sin erhalten wir von

Satz 3.8

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots$$

und

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$$

Beweis

Mit der Exponentialreihe gilt

$$\begin{aligned}\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\end{aligned}$$

denn $i^{2k} = (-1)^k$. Im Vergleich mit der Eulerschen Formel ergibt sich die Behauptung; die auftretenden unendlichen Reihen konvergieren absolut, da die Exponentialreihe absolut konvergiert.

Trigonometrische Funktionen. III

Weitere Eigenschaften von sin und cos:

- sin und cos haben *unendlich viele Nullstellen*:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= 0 \text{ für } x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cos(x) &= 0 \text{ für } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

- sin und cos sind beschränkt:

$$|\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel: Es ist $\sin(2x + 1) = 0$, wenn $2x + 1 = k\pi$ bzw. $x = \frac{k\pi - 1}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Also gibt es unendlich viele Lösungen von $\sin(2x + 1) = 0$.

sin und cos sind umkehrbar, wenn man sie auf Intervalle einschränkt, auf denen sie streng monoton sind. Üblicherweise nimmt man für den sin den Definitionsbereich $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, für den cos $[0, \pi]$. Die Umkehrfunktionen **Arcussinus** $\arcsin(x)$ und **Arcuskosinus** $\arccos(x)$ sind auf $[-1, 1]$ definiert und nehmen Werte aus $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bzw. aus $[0, \pi]$ an.