

7.1, a) $f(x) = \exp(-x)$, $x_0 = 0$

Es gilt:

$$f(x) = \exp(-x), \quad f(0) = \exp(0) = 1,$$

$$f'(x) = -\exp(-x), \quad f'(0) = -\exp(0) = -1,$$

$$f''(x) = \exp(-x), \quad f''(0) = 1,$$

$$f'''(x) = -\exp(-x), \quad f'''(0) = -1,$$

...

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \exp(-x), \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n.$$

Die Taylorreihe von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

$$= 1 - 1 \cdot (x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 - \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \dots$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, denn für den Konvergenzradius r gilt

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^k (k+1)!}{k! (-1)^{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty.$$

b) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $x_0 = 0$

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad f(0) = \cos(0) = 1,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad f'(0) = -\frac{1}{2} \sin(0) = 0,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad f''(0) = -\frac{1}{4} \cos(0) = -\frac{1}{4},$$

$$f'''(x) = \frac{1}{8} \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad f'''(0) = \frac{1}{8} \sin(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{16} \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad f^{(4)}(0) = \frac{1}{16} \cos(0) = \frac{1}{16}$$

...

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) &= 1 + 0(x-0) - \frac{1}{4 \cdot 2!}(x-0)^2 + 0 \cdot \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{16 \cdot 4!}(x-0)^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (*) \end{aligned}$$

Die Reihe (*) konvergiert für alle $|x^2| < r$ mit

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^k (2(k+1))! 2^{2(k+1)}}{(2k)! 2^{2k} (-1)^{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)! 2^{2k+2}}{(2k)! 2^{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 4(2k+2)(2k+1) = \infty,$$

und daher für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$, $x_0 = 0$

(2)

Es gilt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{und} \quad \exp(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} 2 \cosh(x) &= \exp(x) + \exp(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} + \frac{(-1)^k x^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \underbrace{(1 + (-1)^k)}_{\substack{= 2, k \text{ gerade} \\ = 0, k \text{ ungerade}}} = 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Daher

$$\cosh(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

7.2. Aus 7.1 b) erhalten wir das Taylorpolynom 4. Grades $T_4(x)$ für $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ mit $x_0 = 0$:

$$T_4(x) = 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{384}x^4. \quad \text{Ferner}$$

$$1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{384}x^4 = 0 \quad (\cdot 384)$$

$$x^4 - 48x^2 + 384 = 0$$

$$x^2 := a$$

$$a^2 - 48a + 384 = 0$$

$$a = \frac{-(-48) \pm \sqrt{(-48)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 384}}{2 \cdot 1} = \frac{48 \pm \sqrt{2304 - 1536}}{2}$$

$$= \frac{48 \pm \sqrt{768}}{2} = \frac{48 \pm 16\sqrt{3}}{2} = 24 \pm 8\sqrt{3} \quad (> 0)$$

$$x_1 = \pm \sqrt{24 - 8\sqrt{3}} \approx \pm 3.1849$$

$$x_2 = \pm \sqrt{24 + 8\sqrt{3}} \approx \pm 6.15276$$

$$x = \sqrt{24 - 8\sqrt{3}} \approx 3.1849 \in [-1, 4]$$

Zum Vergleich die exakte Lösung: $\pi \approx 3.1415$

7.3. Nach dem Satz von Taylor gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (3.)
 $\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$, wobei $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ mit
 geeignetem ξ zwischen x und 0 .

a) 3 Glieder (d.h. bis zu 2. Ableitung)

$$R_2(0.5) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} 0.5^3 = \frac{\exp(\xi)}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48} e^{\xi} \text{ mit } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } 0.5.$$

Mit $\xi = 0.5$ wird der oben stehende Term maximal.

Der Fehler $R_2(0.5)$ kann maximal $\frac{1}{48} e^{0.5} \approx 0.03434848$ werden. Zum Vergleich:

$$\left| e^{0.5} - \sum_{k=0}^2 \frac{0.5^k}{k!} \right| \approx |1.64872127 - 1.625| = 0.02372127.$$

$$b) R_3(0.5) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} 0.5^4 = \frac{e^{\xi}}{24} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{384} e^{\xi} \text{ mit } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } 0.5.$$

$$\xi = 0.5 \Rightarrow \frac{1}{384} e^{0.5} \approx 0.00429354$$

$$c) R_4(0.5) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} 0.5^5 = \frac{e^{\xi}}{120} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{46080} e^{\xi} \text{ mit } -||-.$$

$$\xi = 0.5 \Rightarrow \frac{1}{46080} e^{0.5} \approx 0.00042935.$$

7.4. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = -1$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(x+1)+1} = \frac{1}{2-(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2} \right)^k \quad \left(\text{für } \left| \frac{x+1}{2} \right| < 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} (x+1)^k \quad \left(\text{für } |x+1| < 2 \right).$$