Lösungsvorschläge für 5. Übungsblatt

5.1. a) $f(x)=\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ ist an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar, denn

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty .$$

b) Für $x \leq 0$ ist $f(x)=1-x$ und für $x>0$ ist $f(x)=\cos(x)$.
An der Stelle $x_0=0$ ist $f(x)$ nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{h\to 0-} \frac{(1-h)-1}{h} = -1 \neq \lim_{h\to 0+} \frac{\cos(h)-\cos(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\cos(h)-1}{h} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{(\cos(h)-1)'}{h'} = \lim_{h\to 0+} \frac{-\sin(h)}{1} = \frac{\sin(0)}{1} = 0 .$$

5.2. a) $$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' \underset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} .$$

b) $$f'(x) = (\sin(x)\cdot\exp(-x))' \underset{\text{Produktregel}}{=} (\sin(x))'\cdot\exp(-x) + \sin(x)(\exp(-x))'$$
$$= \cos(x)\exp(-x) + \sin(x)(-\exp(-x))$$
$$= \exp(-x)(\cos(x) - \sin(x)) .$$

c) $$f'(x) = \left(\frac{\log(7x^2+13)}{x^4+1}\right)' \underset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{(\log(7x^2+13))'(x^4+1) - \log(7x^2+13)\cdot(x^4+1)'}{(x^4+1)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{7x^2+13}\cdot 14x\cdot(x^4+1) - \log(7x^3+13)\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2}$$
$$= \frac{14x}{(7x^2+13)(x^4+1)} - \frac{\log(7x^3+13)\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} .$$

d) $$f'(x) \underset{\text{Kettenregel}}{=} (\cos(ax+b))' = -\sin(ax+b)\cdot(ax+b)' = -a\sin(ax+b) .$$

e) $$f'(x) = (\cos(\sin(\cos(x))))' = -\sin(\sin(\cos(x)))\cdot(\sin(\cos(x)))'$$
$$= -\sin(\sin(\cos(x)))\cdot\cos(\cos(x))\cdot(\cos(x))'$$
$$= \sin(\sin(\cos(x)))\cdot\cos(\cos(x))\cdot\sin(x) .$$

5.3. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(-x)-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\exp(-x)-1)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\exp(-x)}{1} = -\frac{\exp(0)}{1} = -1.$ (2)

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{42\log(x)}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(42\log(x))'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{42}{x}}{1} = \frac{42}{1} = 42.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin(x))'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{2x^3+3x}{2x^4-x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{(2x^3+3x)'}{(2x^4-x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0+} \left((6x^2+3)\cdot\frac{1}{8x^3-2x}\right) = 3\cdot(-\infty) = -\infty.$

Lokale Näherung:

5.4. $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ (für x nahe bei x_0)

Für x nahe bei 0:

$$\underline{\sin(x)} \approx \sin(0) + \sin'(0)(x-0) = \sin(0) + \cos(0)\cdot x = 0 + 1\cdot x = \underline{\underline{x}}$$

Damit

$\sin(0.001) \approx 0.001.$

5.5. Das Volumen des aus der Platte geformten Quaders der Höhe x ist $V(x) = (10-2x)(16-2x)x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$ $(0 \le x \le 5)$. Wegen $V(0) = V(5) = 0$ sind die Randpunkte keine Maximalstellen, diese sind aus den stationären Punkten aus $(0,5)$ zu suchen. $V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0$ hat in $(0,5)$ nur eine Lösung $x=2$. Diese ist die Maximalstelle $(V''(x) = 24x - 104,\ V''(2) < 0)$; das maximale Volumen $V(2) = 144\,\text{cm}^3$.

Aufgabe 5.6

```
f(x) = tan(x/4)-cot(x/4); print "f(x)=",f(x)
Newton(x) = x - f(x)/diff(f(x),x); print "Newton(x)=", Newton(x)
```

```
f(x)= tan(1/4*x) - cot(1/4*x)
Newton(x)= x - 4*(tan(1/4*x) - cot(1/4*x))/(tan(1/4*x)^2 +
csc(1/4*x)^2 + 1)
```

```
eps=0.0000005
xi = 2.0
print "x0=",xi
print "f(x0)=",f(xi)
print ""
xii=Newton(xi)
print "xn=",xii
print "abs(xn-x(n-1))=",abs(xii-xi)
print "f(xn)=",f(xii)
print ""
while abs(xii-xi)>eps:
    xi=xii
    xii = Newton(xi)
    print "xn=",xii
    print "abs(xn-x(n-1))=",abs(xii-xi)
    print "f(xn)=",f(xii)
    print ""
```

```
x0= 2.00000000000000
f(x0)= -1.28418523186866

xn= 2.90929742682568
abs(xn-x(n-1))= 0.909297426825682
f(xn)= -0.233345469311830

xn= 3.13950913306779
abs(xn-x(n-1))= 0.230211706242110
f(xn)= -0.00208352127572498

xn= 3.14159265208235
abs(xn-x(n-1))= 0.00208351901455428
f(xn)= -1.50744694504823e-9

xn= 3.14159265358979
abs(xn-x(n-1))= 1.50744705607053e-9
f(xn)= 4.44089209850063e-16
```

```
numerical_approx(pi, digits=6)
```

```
3.14159
```