Lösungsvorschlag für 4. Übungsblatt

4.1. a) $\log(n) = O(1)$ F (weil der Logarithmus unbeschränkt ist)

b) $42^n = O(42^n)$ T ($|42^n| \leq 1 \cdot |42^n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$)

c) $5\cos(3n) = O(1)$. T ($|5\cos(3n)| \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Funktion ist beschränkt)

d) $-5n^2+4n+2 = O(n^2)$ T (für ein Polynom wird die Ordnung von der höchsten Potenz bestimmt)

e) $2^{-n} = O(1)$ T (2^{-n} ist eine Nullfolge und damit beschränkt)

f) $3^n = O(2^n)$ F (die Folge $\left|\frac{3^n}{2^n}\right|$ ist divergent)

4.2. a) Es gilt $$(n+1)^2 = n^2+2n+1 = n^2\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}_{\leq 4 \text{ für } \forall n \in \mathbb{N}} \leq 4n^2$$

Damit haben wir mit $c=4$ und $n_0=1$ Konstanten gefunden, sodass $(n+1)^2 \leq 4n^2$ für alle $n \geq 1$.
Daraus folgt $(n+1)^2 = O(n^2)$.

b) Es gilt
$$\sqrt{n^2+\frac{1}{2}} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)} = n\sqrt{\underbrace{1+\frac{1}{2n^2}}_{\leq \frac{3}{2}}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\, n \text{ für alle } n \geq 1.$$

Damit folgt
$$\sqrt{n^2+\frac{1}{2}} = O(n).$$

4.3. • $f_n = 3 = O(1)$ (f_n ist beschränkt)

• $f_n = \underbrace{3n}_{=O(n)} \cdot \underbrace{(n+\log_2(n))}_{=O(n)} = O(n^2)$

• $f_n = \underbrace{5n^2}_{=O(n^2)} + \underbrace{n\sin(n)}_{=O(n) \text{ und umsomehr } O(n^2)} = O(n^2)$

• $f_n = \sqrt{n} + 2^{n+1} = n^{\frac{1}{2}} + \underline{2\cdot 2^n} = O(2^n)$.

dieser Summand hat die höchste Ordnung

4.4. Die erste Aussage ist falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:

$2^n = O(3^n)$, weil nach dem Satz 1.5 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n}{3^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{<1}{}^n = 0,$$

aber $3^n \neq O(2^n)$ denn $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^n}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)}_{>1}{}^n = \infty$.

Die zweite Aussage ist wahr, denn

$|f(n)| \leq C\,|f(n)|$ mit $C = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die dritte Aussage ist i. A. nicht richtig, weil zum Beispiel für $f(n) = \frac{1}{n}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{(f(n))^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \infty.$$

4.5. Im Sinne des "Groß-O" ist der Algorithmus B besser. Im Bezug auf Geschwindigkeit ist der Algorithmus B schneller als der Algorithmus A, wenn $T_B(n) \leq T_A(n)$, d.h. wenn $2.5\,n^2 \leq 0.1\,n^2 \log_{10} n$. Daraus folgt $\log_{10} n \geq 25$, also $n \geq n_0 = 10^{25}$. Im Fall $n \leq 10^9$ ist der Algorithmus A zu empfehlen.