Lösungsvorschlag für 3. Übungsblatt

3.1. • Die Funktion $x \mapsto x^2+1$ ist offensichtlich positive für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Als Komposition von auf ihren Definitionsbereichen stetigen Funktionen ist $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig.

• Ebenso ist $g(x)$ als Komposition auf ganz $\mathbb{R}$ definierter stetiger Funktionen fü alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und stetig.

• $\operatorname{sign}(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, Besitzt aber keinen Grenzwert für x gegen 0, denn

$$\lim_{x \to 0-} \operatorname{sign}(x) = \lim_{x \to 0-} (-1) = -1$$

und

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sign}(x) = \lim_{x \to 0+} (1) = 1$$

existieren, aber ungleich sind. Insbesondere ist $\operatorname{sign}(x)$ an der Stelle $x=0$ nicht stetig.

• $h(x)$ ist stetig in allen $x \neq \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
(Für diese x ist $h(x)$ nicht definiert, deshalb stellt sich die Frage nach der Stetigkeit in diesen x gar nicht.)

3.2. a) Links von $x_0 = 2$ ist $f(x) = \frac{1}{2}x^2+1$ (eine Parabel)
rechts von $x_0=2$ ist $f(x) = -x+5$ (eine Gerade). Es gilt

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} \left(\frac{1}{2}x^2+1\right) = \frac{1}{2}2^2+1 = 3$$

und

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (-x+5) = -2+5 = 3.$$

Also ist linksseitigen Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert = 3.

Damit ist $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

b) Das Verhalten von $f(x) = \frac{1}{x}$ links und rechts von 0 ist unterschiedlich: Für x gegen $0+$ wachsen die Funktionswerte über jede Schranke, für x gegen $0-$ fallen sie unter jede Schranke. Also:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

c) Für x gegen 0 wachsen die Funktionswerte über jede Schranke:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

d) $f(x)$ für x gegen $x_0 = 0$ immer stärker oszilliert. Man kann deshalb vermuten, dass für x gegen 0 gar kein Grenzwert existiert. Wählt man z.B. die Nullfolge $x_n = \frac{1}{\pi n}$. Hätte die Funktion für $x \to 0$ einen Grenzwert, dann müsste die Folge $f(x_n)$ gegen diesen Grenzwert konvergieren. Die Werte $f(x_n) = \cos(\pi n) = (-1)^n$ oszilieren zwischen -1 und 1. Von einem Grenzwert von $f(x)$ für x gegen 0 kann keine Rede sein.

3.3. a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)}{\cancel{x-1}} = (1+1)(1^2+1) = 4.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2-1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}.$

c) Mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion findet man

$$\frac{\exp\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\exp(1)}{\exp\left(\frac{1}{x}\right)} = \exp(1) = e,$$

womit die zu untersuchende Funktion konstant e ist, und somit den Grenzwert e besitzt.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)-3}{(1-x)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)} =$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2-1)+(x-1)}{(1-x)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} -\frac{\cancel{(x-1)}((x+1)+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} = -\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = -\frac{1+2}{1^2+1+1} = -1.$

(Hier wir haben benutzt, dass $1-x^3 = (1-x)(x^2+x+1)$ und $x^2-1 = (x+1)(x-1)$.

3.4. Die Additionstheoreme für sin und cos ergeben sich durch Funktionalgleichung von exp durch 'Koef. vergleich':

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = \exp(i(x+y))$$
$$= \exp(ix) \cdot \exp(iy)$$
$$= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y))$$
$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$+ i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).$$

3.5.

Kommt noch ...