Lösungsvorschlag für 2. Übungsblatt

2.1. Wir schreiben den Dezimalbruch als geometrische Reihe:

$$0,\overline{12} = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \dots = \frac{12}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= \frac{12}{100}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{12}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{12}{\cancel{100}}\cdot\frac{\cancel{100}}{99} = \frac{12}{99}.$$

Kurz: Sei $0,\overline{12} = x$.
Dann $100x = 12,\overline{12} = 12 + x$,
also $99x = 12$ bzw. $x = \frac{12}{99}$.

2.2. • Die erste Reihe ist divergent, wie sich im Vergleich mit der harmonische Reihe zeigt:

wegen $\frac{1}{2n+3} \geq \frac{1}{5n}$ für $n \geq 1$, folgt

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+3} \geq \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

und die Partielsummen rechts divergieren für $N \to \infty$.

• Die zweite Reihe ist eine konvergente geometrische Reihe mit Grenzwert

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

• Die dritte Reihe ist konvergent:

wegen $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ für $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{=0} - \frac{1}{3} \pm \dots \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}$$

$$= 2 - \frac{1}{N}.$$

Die konvergente Majorante $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ nennt man Teleskopsumme.

2.3. a) Wir benutzen das Quotientenkriterium mit $a_k = \frac{x^k}{k!}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}\cdot k!}{(k+1)!\cdot x^k}\right| = \frac{|x|}{k+1}.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0$ konvergiert die Reihe für alle $x\in\mathbb{R}$.

(Wir werden später sehen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, $x\in\mathbb{R}$) ← Exponentialreihe

b) Der Quotient der Summanden ist

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}\cdot k}{(k+1)\cdot x^k}\right| = \frac{|x|}{1+\frac{1}{k}}$$ und der Grenzwert ist

$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{1+\frac{1}{k}} = |x|$. Damit ist die Reihe für alle reelle x mit $|x|<1$ konvergent. (Später wir werden sehen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\log(1-x)$, $|x|<1$.)

Für $|x|>1$ ist die Reihe divergent. Für $x=1$ erhalten wir die harmonische Reihe, die divergent ist. Für $x=-1$ erhalten wir alternierende harmonische Reihe, die konvergiert.

2.4. • Für die erste Reihe liefert das Quotientenkriterium sofort die Divergenz:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2^{k+1}\cdot k^{10}}{(k+1)^{10}\cdot 2^k} = \frac{2}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{10}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{10}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{2}{1^{10}} = 2 > 1.$$

• Die zweite Reihe ist konvergent. Es gilt

$$\frac{3k^2+1}{k^4+1} \le \frac{3k^2+1}{k^4} \le \frac{4k^2}{k^4} = \frac{4}{k^2} \quad \text{für alle } k\in\mathbb{N}.$$

Da mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ konvergiert, besitzt damit die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+1}{k^4+1}$ in der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ eine konvergente Majorante und ist nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

3.

- Für die dritte Reihe gilt es

$$\left|\frac{2^n}{3^n+4^n}\right| = \frac{2^n}{3^n+4^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+4^n}$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ und ist nach Majorantenkriterium selbst konvergent.

2.5. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert, denn sie ist die Exponentialreihe mit $x=1$ (siehe Aufgabe 2.3.a)).

Uebung2


```
var('n')
s0=sum(1/factorial(n), n, 0, 0); print(N(s0))
s2=sum(1/factorial(n), n, 0, 2); print(N(s2))
s9=sum(1/factorial(n), n, 0, 9); print(N(s9))
s99=sum(1/factorial(n), n, 0, 99); print(N(s99))
s999=sum(1/factorial(n), n, 0, 999); print(N(s999))
```

```
1.00000000000000
2.50000000000000
2.71828152557319
2.71828182845905
2.71828182845905
```

```
var('n')
s = sum(1/factorial(n), n, 0, infinity)
s
```

evaluate

```
e
```