Lösungsvorschlag für 1. Übungsblatt

1.1. • (Induktionsanfang) $n=1$: $F_2 F_0 - F_1^2 = 1\cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$

• (Induktionsschritt) $n \mapsto n+1$:

$$\underline{F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2} = \underbrace{(F_{n+1}+F_n)}_{=F_{n+2}}F_n - F_{n+1}\underbrace{(F_n + F_{n-1})}_{=F_{n+1}}$$

$$= \cancel{F_{n+1}F_n} + F_n^2 - \cancel{F_{n+1}F_n} - F_{n+1}F_{n-1}$$

$$= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}$$

$$= (-1)\underbrace{(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2)}_{=(-1)^n \text{ nach Induktionsannahme}} = (-1)(-1)^n = \underline{(-1)^{n+1}}$$

1.2. Nach der Formel von Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(G^n - (-G)^{-n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}G^n + \varepsilon_n \quad \left(\text{mit } G = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),$$

wobei $\varepsilon_n := -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{G}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Also

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{G^{n+1} + \sqrt{5}\,\varepsilon_{n+1}}{G^n + \sqrt{5}\,\varepsilon_n} = \frac{\cancel{G^n}(G + \sqrt{5}\,\varepsilon_{n+1}\cdot G^{-n})}{\cancel{G^n}(1 + \sqrt{5}\,\varepsilon_n\cdot G^{-n})} \quad \text{und}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{G + \sqrt{5}\,\varepsilon_{n+1}G^{-n}}{1 + \sqrt{5}\,\varepsilon_n G^{-n}} = \frac{G + 0\cdot 0}{G + 0\cdot 0} = G.$$

1.3. • $a_n = 4 - \frac{1}{n} - n^3$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$, denn n^3 divergiert bestimmt gegen $+\infty$ (klar) und $4 - \frac{1}{n}$ ist konvergent.

• $b_n = \frac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1}$ ist konvergent:

wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 1$ und $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$

und damit $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{3}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$

- $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sin(n)$ konvergiert gegen 0,
  denn $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und $|\sin(n)| \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$
  und das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkte Folge ist eine Nullfolge (siehe Satz 1.6.)

- $d_n = \frac{2^n}{n!}$ konvergiert:

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Mit dem Vergleichskriterium folgt, dass $(d_n)_n$ eine Nullfolge ist.

1.4. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} 2a_n = \lim_{n\to\infty} \left((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\right) = \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) + \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a+b$$

und damit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{a+b}{2}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ – analog!). Ferner

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} = \frac{a^2-b^2}{4}.$$

1.5. a) Wir zeigen zunächst $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Induktion:

$n=1$: $a_1 = 1 \leq \sqrt{13} = a_2$.

$n \mapsto n+1$: $a_{n+1} = \sqrt{12+a_n} \leq \sqrt{12+a_{n+1}} = a_{n+2}$,
denn nach Induktionsannahme $a_n \leq a_{n+1}$ folgt $a_n + 12 \leq a_{n+1}+12$.

Damit ist die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend.

Wir zeigen jetzt $a_n \leq 13$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Induktion:

$n=1$: $a_1 = 1 \leq 13$.

$n \to n+1$: $a_n \leq 13 \Rightarrow 12 + a_n \leq 25 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{12+a_n} \leq \sqrt{25} = 5 \leq 13$.

Damit ist die Folge $(a_n)_n$ nach oben beschränkt.

b) Die Folge $(a_n)_n$ ist konvergent, weil sie nach a) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist (siehe Satz 1.6.). Für den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{12+a_n} = \sqrt{12+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{12+a} \,.$$

Es folgt $a^2 = 12 + a$ bzw. $a^2 - a - 12 = 0$, also

$$a = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+48}\right) = \frac{1\pm 7}{2},$$

$$a = -3 \text{ oder } a = 4;$$

da die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend ist, ergibt sich $a \geq a_1 = 1$ und daraus $a = 4$.

1.6.

The Sage Notebook
Version 4.5.3

admin Toggle | Home | Published | Log | Settings | Help
Report a Problem | Sign out

Uebung1

Save | Save & quit | Discard & quit

last edited on October 09, 2011 03:55 PM by admin

File... | Action... | Data... | sage | Typeset

Print | Worksheet | Edit | Text | Undo | Share | Publish

```
f(n)=(1+1/n)^n
print(f(1.))
print(f(2.))
print(f(3.))
print(f(10.))
print(f(100.))
print(f(1000.))
print(f(10000.))
```

```
2
2.25000000000000
2.37037037037037
2.59374246010000
2.70481382942153
2.71692393223559
2.71814592682493
```

SAGE: Open Source Mathematics Software
www.sagemath.org

```
lim(f(n), n = oo)
```

```
e
```

```
N(e)
```

```
2.71828182845905
```

evaluate

jsMath