Numerische Verfahren und Analysisgrundlagen | Hochschule RheinMain
19-20.1.2012 (WS 2011/12) | Dr. Rasa Steuding

14. Übungsblatt

Thema: *Differentialgleichungen*

14.1. Man löse durch Trennung der Variablen:

$$\text{a) } y' = y^2, \quad y(1) = 1$$

$$\text{b) } y' = \frac{1 - y^2}{x}, \quad y(1) = -2.$$

14.2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'y(x^2 + 1) + x(y^2 + 1) = 0, \quad y(0) = 1$$

mit maximalem Definitionsintervall.

14.3. Nach dem **Newtonschen Abkühlungsgesetz** ist die Temperaturabnahme eines Körpers proportional zur Temperaturdifferenz mit der Umgebungstemperatur T_0:

$$T'(t) = -k(T_0 - T(t)).$$

Detective Horatio findet das Opfer um Mitternacht und stellt eine Körpertemperatur von $28\,C$ fest. Eine halbe Stunde später sind es nur noch $26\,C$. Wann wurde das Opfer ermordet, wenn die Umgebungstemperatur $18\,C$ beträgt und die normale Körpertemperatur $37\,C$ ist?

14.4. Betrachten wir zwei Populationen $x(t)$ (Beute) und $y(t)$ (Räuber). Ohne Räuber würde sich die Beute gemäß $x'(t) = \alpha x(t)$ vermehren. Sind aber Räuber vorhanden, so vermindert sich die Wachstumsrate um einen Term $\beta y(t)$, der proportional zur Anzahl der Räuber ist. Das führt auf die Gleichung

$$x'(t) = (\alpha - \beta y(t))x(t)$$

für die Beutetiere. Analog kann man ansetzen, dass die Räuber ohne Beute mit einer Sterberate γ aussterben würden: $y'(t) = -\gamma y(t)$. Durch das Vorhandensein von Beutetieren vermindert sich die Sterberate um einen Term $\delta x(t)$ proportional zur Anzahl der Beutetiere und wir erhalten die Gleichung

$$y'(t) = -(\gamma - \delta x(t))y(t)$$

für die Räuber.

Beide Gleichungen bilden zusammen ein System von Differentialgleichungen, das sogenannte **Volterra-Lotka Räuber-Beute-Modell:**

$$\begin{aligned} x'(t) &= (\alpha - \beta y(t))x(t) \\ y'(t) &= -(\gamma - \delta x(t))y(t) \end{aligned}$$

Es kann nur noch numerisch gelöst werden. Berechnen Sie (mit Hilfe eines Computers) die Lösung numerisch.