Numerische Verfahren und Analysisgrundlagen — Hochschule RheinMain
8-9.12.2011 (WS 2011/12) — Dr. Rasa Steuding

10. Übungsblatt

Thema: *Fehlerbetrachtung*

10.1. a) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{10}{5x-1}$. Bestimmen Sie einen Näherungswert T_4 für $I := \int_2^4 f(x)dx$ mit der Trapezregel für 4 Teilintervalle und schätzen Sie den Fehler $|T_4 - I|$ ab.

b) Es sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \log(\cos(x))$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades T_2 für f an der Stelle $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ gilt

$$|f(x) - T_2| \le \frac{2}{3}x^3.$$

10.2. Sei $f(x) = \sqrt{x}$. Schätzen Sie den relativen Fehler bei der Funktionsauswertung für $x = 0.1234501$ in 5-stelliger dezimaler Gleitkommaarithmetik. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem wirklichen Fehler.

10.3. Bestimmen Sie die Kondition der folgenden Funktionen:

$$\text{a)} f(x) = 42 \cdot x, \quad \text{b)}\ f(x) = 42 - x, \quad \text{c)}\ f(x) = 3\exp(x) - 3.$$

Interpretieren Sie jeweils das Ergebnis.

10.4.

- Sei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{3}.$$
Werten Sie $f(x)$ unter Anwendung von Gleitkommaarithmetik aus. Gehen Sie von exakten Eingabedaten x aus. Linearisieren Sie, indem Sie Fehlerterme höherer Ordnung vernachläßigen.
- Berechnen Sie den bei der Berechnung von $f(x)$ auftretenden relativen Rundungsfehler. Wie verhält sich der relative Rundungsfehler für große x? Ist die Auswertung für alle $x \in \mathbb{R}$ stabil?

10.5. Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke fehleranfälliger ist. Versuchen Sie ein besseres Verfahren zur Berechnung anzugeben und untersuchen Sie auch die Kondition.

$$\text{a)} \quad f(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2 \text{ für } x \approx 0;$$
$$\text{b)} \quad f(x) = \exp(x) - 1 - x \text{ für } x \approx 0.$$

10.6.

Die Maschinengenauigkeit ε kann durch die Eigenschaft

$$\text{größte Maschinenzahl } M > 0 \text{ mit } 1.0 +^* M = 1.0$$

charakterisiert werden ($+^*$ steht für Rechneraddition). Bestimmen Sie die Maschinengenauigkeit Ihres Rechners. Schreiben Sie dazu ein Programm, das die Maschinengenauigkeit ε_M bestimmt. Hinweis: Bilden Sie Summen der Art $1 + 2^{-k}$ mit $k \ge 0$ und schauen Sie sich die Ergebnisse an.