

8. ÜBUNGSBLATT

Thema: Integralrechnung

8.1. Berechnen Sie $\int_a^b x^2 dx$ mit Hilfe der Riemannschen Summe.

8.2. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int \left(c \sin(x) + 2 \exp(x) - \frac{1}{x} \right) dx, \quad c \in \mathbb{R};$

b) $\int x \sqrt{3x^2 - 1} dx;$

c) $\int_{-2}^4 x|x| dx;$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{1 - \sin(x)} dx;$

e) $\int \frac{1}{x^2 - 2x} dx;$

f) $\int_0^1 x \exp(x) dx.$

8.3. Berechnen Sie den Flächeninhalt, der vom Funktionsgraphen von

a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2 - x^2$;

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ und der Tangente im Maximum

eingeschlossen wird.

8.4. Berechnen Sie:

a) $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1} dx;$ b) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

8.5.



Um die Fläche $\int_a^b f(x) dx$ einer Funktion $0 \leq f(x) \leq K$ zu ermitteln, kann man die **Monte Carlo Methode** verwenden: Ein zufällig ausgewählter Punkt $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [0, K]$ liegt genau dann in der von f begrenzten Fläche, wenn $y_0 \leq f(x_0)$. Wählt man nun mit einem Zufallsgenerator Punkte $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [0, K]$, so verhält sich die Anzahl der Punkte unter der Kurve (also mit $y_0 \leq f(x_0)$) zur Gesamtanzahl der Punkte im Rechteck $[a, b] \times [0, K]$ im statistischen Mittel wie die Fläche unter der Kurve zur Gesamtfläche $(b - a)K$. Berechnen Sie mit Monte Carlo Methode eine Näherung für das Integral $\int_0^1 x^2 dx$.