Numerische Verfahren und Grundlagen der Analysis

Rasa Steuding

Hochschule RheinMain Wiesbaden

Wintersemester 2011/12

1. Folgen

Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen sind *rekursiv* definiert durch

$$F_0 := 0, \; F_1 := 1, \; F_{n+1} := F_n + F_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

also

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Wie groß ist F_{100}? Was ist der exakte Wert von F_{100}?

Mit der *Rekursion* lässt sich F_{100} nur *langsam* berechnen.
Schneller geht es mit einer *expliziten* Darstellung:

Satz 1.1 (Formel von Binet)

Sei $G := \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ *(der goldene Schnitt). Dann gilt für* $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(G^n - (-G)^{-n}\right).$$

Formel von Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(G^n - (-G)^{-n}) \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis durch vollständige Induktion: Gilt

- die Formel ist wahr für $n = 0$ und $n = 1$ (Induktionsanfang),
- ist die Formel wahr für $n - 1$ und n, so auch für $n + 1$ (Induktionsschritt),

dann besteht die Formel für alle $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Induktionsanfang:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(G^0 - (-G)^{-0}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 - 1) = 0 = F_0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(G^1 - (-G)^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}+1}\right) = 1 = F_1.$$

Formel von Binet

Induktionsschritt: Mit der rekursiven Definition und der Formel für $n-1$ und n folgt die Formel für $n+1$:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(G^n - (-G)^{-n} + G^{n-1} - (-G)^{1-n}) = \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(G^{n+1} - (-G)^{-(n+1)}). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Die Fibonacci Rekursion gehört zu einer wichtigen und häufig auftretenden Klasse von Rekursionen - den **homogenen linearen Rekursionen**. Diese können systematisch gelöst werden.

Homogene lineare Rekursionen

Eine Rekursion der Form

$$\sum_{j=0}^{k} c_{n-j} a_{n-j} = c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} + \cdots + c_{n-k} a_{n-k}$$

heißt **homogene lineare Rekursion** (k-ter Ordnung).
Deren **charakteristisches Polynom** ist definiert als

$$\sum_{j=0}^{k} c_{n-j} x^{k-j} = c_n x^k + c_{n-1} x^{k-1} + c_{n-2} x^{k-2} + \cdots + c_{n-k}.$$

Mit Hilfe der Nullstellen dieses Polynoms kann man die Lösung der Rekursion bestimmen.

Definition von Folgen, Beispiele

Eine **Folge** reeller Zahlen $(a_n)_n$ ist eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n. \end{array}$$

Hierfür schreibt man auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Die reellen Zahlen a_n heißen **Folgenglieder**.

Beispiele:

- $a_n = a \in \mathbb{R}$ führt auf *konstante Folgen* $(a, a, \ldots)$.
- Sei $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$; dies gibt
$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right).$$
- Für $a_n = (-1)^n$ ensteht eine *alternierende Folge*
$$(1, -1, 1, -1, \ldots).$$
- *Fibonacci-Folge* (siehe oben).

Monotone Folgen

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt **monoton wachsend** (bzw. **streng monoton wachsend**), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ (bzw. } a_{n+1} > a_n).$$

Eine Folge heißt **monoton fallend** (bzw. **streng monoton fallend**), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} \leq a_n \text{ (bzw. } a_{n+1} < a_n).$$

Eine Folge heißt **(streng) monoton**, falls sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele

- Die konstante Folge $a_n = a \in \mathbb{R}$ ist monoton wachsend und monoton fallend.
- Die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$ ist streng monoton fallend.
- Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist durch $a_n := a^n$ $(n \geq 0)$ die Folge

  $$(1, a, a^2, a^3, a^4, \dots)$$

  definiert. Diese Folge ist für $a > 1$ streng monoton wachsend, für $a = 1$ monoton wachsend, für $0 < a < 1$ streng monoton fallend.
- *Fibonacci-Folge* (siehe oben) ist monoton wachsend.

Konvergenz und Divergenz von Folgen

Eine Folge $(a_n)_n$ heißt **konvergent mit Grenzwert** a, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \text{für alle} \quad n \geq N;$$

wenn also die Folgeglieder a_n für alle hinreichend großen Indizes n beliebig nahe beim Grenzwert a liegen.
In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Ansonsten heißt $(a_n)_n$ **divergent**.

Beispiele

- konstante Folgen sind konvergent: 2,2,2,...;
- $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ ist divergent;
- Die Folge der $a_n := \frac{1}{n}$ ist konvergent mit Grenzwert null:

$$1,\ \frac{1}{2} = 0,5,\ \frac{1}{3} = 0,\overline{3},\ \ldots,\ \frac{1}{10} = 0,1,\ \ldots,\ \frac{1}{100} = 0,01,\ \ldots \to 0;$$

- Die Folge der $a_n := \frac{1}{n^2}$ ist konvergent mit Grenzwert null.

Beschränkte Folge

Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heißt **nach oben beschränkt** (bzw. **nach unten beschränkt**), wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq K \quad (\text{bzw. } a_n \geq K).$$

Die Folge $(a_n)_n$ heißt **beschränkt**, falls es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|a_n| \leq K$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (falls sie also sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist).

Satz 1.2

Jede konvergente Folge $(a_n)_n$ ist beschränkt.

Beweis. Es sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$

$$|a_n - a| < 1.$$

Damit folgt (mit der *Dreiecksungleichung*)

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq |a| + 1$$

für alle $n \geq N$. Mit $K := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$ zeigt sich nun

$$|a_n| \leq K$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele

Die Umkehrung des Satzes ist in allgemeinem falsch, wie das folgende Beispiel zeigt: die alternierende Folge $a_n := (-1)^n$ ist beschränkt aber nicht konvergent.

- Die Folge F_n die Fibonaccizahlen ist divergent, denn per Induktion zeigt sich
$$F_{n+1} \geq n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$
so dass (F_n) unbeschränkt ist, und also nach Satz 1.2 nicht konvergiert.

Eigenschaften von konvergenten Folgen. II

Satz 1.3

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Folge (a_n) konvergiere sowohl gegen a als auch gegen b. Wir führen einen *inderekten* Beweis. Angenommen $a \neq b$. Für $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ (> 0) gibt es dann $N_a, N_b \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N_a \text{ und } |a_n - b| < \varepsilon \text{ für } n \geq N_b.$$

Dann gilt für $n = \max(N_a, N_b)$ mittels der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |a-b| &= |a - a_n + a_n - b| \\ &\leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon = |a-b| \qquad \lightning \end{aligned}$$

Also folgt $a = b$.

Berechnung von Grenzwerten

Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwerten a und b, so ist auch die Folge $(a_n + b_n)$ konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b.$$

Analoges gilt auch für das Produkt und den Quotienten von konvergenten Folgen (wobei u.U. Nullfolgen auszuschließen sind).

Beispiele

- Sei $a_n = \frac{2n-7}{3n+1}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2-\frac{7}{n})}{n(3+\frac{1}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{7}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n})} = \frac{2-7\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}.$$

- Sei $a_n = \frac{1}{n^2}$ für $n \geq 1$, dann gilt $0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$. Sowohl die Folge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen 0. Damit ist auch $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergent, weil:

Vergleichskriterium

Satz 1.4

Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen reeler Zahlen mit $a_n \leq b_n$ für alle (hinreichend großen) $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis. Wir gehen zur Differenzenfolge $(b_n - a_n)_n$ über und zeigen, dass sie einen Grenzwert $c \geq 0$ besitzt. Dann folgt

$$0 \leq c = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)_n = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Angenommen $c < 0$, so gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|(b_n - a_n) - c| < |c|$$

für alle $n \geq N$, woraus der Widerspruch $b_n - a_n < 0$ folgte. Also ist $c \geq 0$.

Nullfolgen

Eine konvergente Folge mit Grenzwert null heißt **Nullfolge**.

Satz 1.5

Sei x eine reelle Zahl. a) Gilt $|x| < 1$, so ist die Folge der Potenzen x^n eine Nullfolge; b) gilt $|x| > 1$, so ist die Folge divergent.

Beweis. a) Aus $|x| < 1$ (o.E. $x \neq 0$) folgt $\frac{1}{|x|} = 1 + q$ mit $q > 0$ und

$$\frac{1}{|x|^n} = (1+q)^n = 1 + nq + \cdots + q^n > 1 + nq.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man wählt $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon q}$ und erhält für alle $n \geq N$ die Abschtzung $\frac{1}{|x|^n} > 1 + nq > 1 + Nq > \frac{1}{\varepsilon}$, d.h. $|x^n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

b) *Übung!*

Kriterien für die Konvergenz von Folgen

Satz 1.6

a) Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Ebenso ist eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent.
b) Das Produkt einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.

Beispiele:

a) Die Folge $a_n = -\frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ ist wegen $-\frac{1}{2(n+1)} > -\frac{1}{2n}$ monoton wachsend. Da sie durch die Zahl 0 nach oben beschränkt ist, konvergiert sie.
b) Die Folge $a_n = (5 + (-1)^n)\frac{1}{n}$ ist das Produkt einer beschränkten Folge $b_n = 5 + (-1)^n$ $(4 \leq b_n \leq 6)$ mit einer Nullfolge $c_n = \frac{1}{n}$, daher konvergiert auch $a_n = b_n c_n$ gegen 0.

Bestimmte Divergenz

Die Divergenz kann u.U. etwas präzisiert werden. Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heißt **bestimmt divergent gegen** $+\infty$, wenn zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n \geq K$$

für alle $n \geq N$; sie heißt **bestimmt divergent gegen** $-\infty$, wenn $(-a_n)_n$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ bzw. } -\infty.$$

Beispiele:

- Die Fibonacci Folge $(F_n)_n$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$
- Die Folge $a_n = (-1)^n n$ divergiert, sie divergiert jedoch nicht bestimmt.

Wie groß ist F_{100}?

Die Folge $a_n := (-G)^{-n}$ in der Formel von Binet ist nach Satz 1.5 eine Nullfolge. Tatsächlich ist $|(-G)^{-n}| < \frac{1}{2}$ für $n \geq 2$ und also F_n die ganze Zahl, die am nahesten bei

$$\frac{1}{\sqrt{5}} G^n$$

liegt. Für $n = 100$ ergibt sich so eine Zahl mit

$$\approx 100 \frac{\log G}{\log 10} = 20,898\ldots$$

vielen Dezimalstellen.

Wie berechnet man schnell die n-te Fibonacci Zahl?

Berechnen der Fibonaccifolge mit Matrizen

Mit $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schnelle Exponentiation

$$\begin{aligned} z &= a^4 \\ z &= a \cdot a \cdot a \cdot a \text{ (drei Multiplikationen)} \\ z &= (a^2)^2 \text{ (zwei Multiplikationen)} \end{aligned}$$

Idee: Multiplikationen einsparen durch Quadrieren.

Da jede Zahl x eine eindeutige Darstellung als

$$x = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i$$

mit $b_i \in \{0, 1\}$ besitzt, lässt sich a^x als

$$a^{b_0 2^0} \cdot a^{b_1 2^1} \cdot a^{b_2 2^2} \cdot \ldots \cdot a^{b_n 2^n} = a^{b_0}(a^{b_1}(\ldots(a^{b_{n-1}}(a^{b_n})^2)^2 \ldots)^2)^2$$

schreiben.

Dadurch lässt sich die Berechnung von a^x von ursprünglich $x - 1$ Multiplikationen auf $\approx (3 \log x)/2$ Multiplikationen (im Durchschnitt) reduzieren.

Der "square and multiply"-Algorithmus

Sei

$$x = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i.$$

Der folgende Algorithmus berechnet a^x:

$g \leftarrow 1$
for $d = n$ to 0 by -1
    $g \leftarrow g \cdot g$
    if $b_d = 1$ then $g \leftarrow g \cdot a$
return g

Satz von Zeckendorf

Satz 1.7

Jede natürliche Zahl N lässt sich eindeutig schreiben als

$$N = F_{n_1} + F_{n_2} + \cdots + F_{n_k} \text{ mit } 2 \leq n_1 \leq n_2 - 2, n_2 \leq n_3 - 2, \ldots, n_{k-1} \leq n_k - 2.$$

In der Summe dürfen also weder F_0 noch F_1 noch zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen vorkommen.

Beispiel: die Zeckendorfsche Darstellung von 100 ist

$$100 = F_{11} + F_6 + F_4 = 89 + 8 + 3.$$

Anwendung in Kryptographie für schnelle Exponentiation!