Numerische Verfahren und Analysisgrundlagen — HochSchule RheinMain
06.10.2011 (WS 2011/12) — Dr. Rasa Steuding

1. Übungsblatt

Thema: *Folgen*

1.1. Beweisen Sie per Induktion, dass

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

1.2. Ist die Folge der Quotienten $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen konvergent? Wenn ja, bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \dots \quad ?$$

1.3. Sind die Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ und $(d_n)_n$ definiert durch

$$a_n = 4 - \frac{1}{n} - n^3, \quad b_n = \frac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1}, \quad c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sin(n) \text{ und } d_n = \frac{2^n}{n!},$$

konvergent oder divergent? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie im Falle der Konvergenz deren Grenzwert an.

1.4. Die Folgen $(a_n + b_n)_n$ bzw. $(a_n - b_n)_n$ seien konvergent mit den Grenzwerten a bzw. b. Zeigen Sie: Die Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ und $(a_nb_n)_n$ konvergieren ebenfalls und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a+b}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{a-b}{2} \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_nb_n = \frac{a^2-b^2}{4}.$$

1.5. Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}, \quad n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_n$ monoton wachsend und beschränkt ist.
b) Bestimmen Sie den Grenzwert von $(a_n)_n$.

1.6.

Man kann zeigen, dass die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend und beschränkt ist, also konvergiert. Der Grenzwert ist die so genannte Eulersche Zahl e. Berechnen Sie das zweite, dritte, zehnte, 100., 1000., und 10000. Folgenglied.