Numerische Verfahren und Grundlagen der Analysis

Rasa Steuding

Hochschule RheinMain Wiesbaden

Wintersemester 2011/12

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen beschreiben das Wachstumsverhalten von Funktionen (einer Veränderlicher) und treten in verschiedensten Zusammenhängen in Natur und Technik auf. Z.B. beschreibt die Differentialgleichung

$$y' = -cy \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = -cy(t)$$

den radioaktiven Zerfall; hierbei ist c eine positive Zerfallskonstante und gesucht ist eine differenzierbare Funktion $y(t)$, die obige Gleichung erfüllt.

Die physikalische Herleitung lautet wie folgt: Der Bruchteil $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$ der Atomkerne eines Nuklids pro Zeitintervall, die zerfallen, ist proportional zur Anzahl $y(t)$ der jeweilig vorhandenen radioaktiven Kerne. Zur mathematischen Lösung beobachten wir, dass die Exponentialfunktion $\exp(-ct)$ eine solche Lösung darstellt.

Es stellen sich sofort Fragen wie: *Wie findet sich eine Lösung ohne zu raten? Gibt es weitere Lösungen?*

Einige einfache Differentialgleichungen

Bekanntlich reproduziert sich die Exponentialfunktion beim Differenzieren: $\exp' = \exp$. Anders formuliert wird also die Gleichung

$$y' = y$$

von der Exponentialfunktion $y = \exp$ gelöst; eine weitere Lösung ist die Nullfunktion, die identisch verschwindet.

Wir können für einige elementare Funktionen Differentialgleichungen aufstellen, die von eben diesen gelöst werden; z.B.:

- für den Logarithmus gilt $(\log x)' = \frac{1}{x}$ für $x > 0$, also ist der Logarithmus eine Lösung der Differentilagleichung $y' = \frac{1}{x}$ für $x > 0$;
- $y' = \sin x$ wird von $\varphi(x) = -\cos x$ gelöst;
- $y' = \cos x$ wird von $\varphi(x) = \sin x$ gelöst.

Differentialgleichungen erster Ordnung

Unter einer Differentialgleichung verstehen wir eine Bedingungsgleichung für eine oder mehrere zu bestimmenden Funktion; genauer sei $U \subset \mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig, dann heißt

$$y' = f(x, y)$$

eine **(gewöhnliche) Differentialgleichung erster Ordnung**. Unter einer Lösung derselben versteht man eine auf einem Interval $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- Der Graph von φ ist in U enthalten, d.h.

$$\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = \varphi(x)\} \subset U;$$

- für alle $x \in I$ gilt

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Wachstumsprozessen. I

Bei einer Bakterienpopulation der Größe $P(t)$ zum Zeitpunkt t wird nach Ablauf einer Zeitspanne Δt eine Zunahme der Population um

$$\Delta P := P(t + \Delta t) - P(t) \approx \lambda P(t)\Delta t$$

mit einer gewissen positiven Konstanten λ beobachtet. Bei vielen Wachstumsprozessen ist eine Vermehrung proportional zum Anfangszustand und zur Zeitspanne zumindest für kurze Zeitspannen typisch. Umformen der obigen Approximation liefert

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx \lambda P(t);$$

die linke Seite ist ein Differenzenquotient und mittels $\Delta t \to 0$ ergibt sich das Wachstumsgesetz

$$P'(t) = \lambda P(t).$$

Diese Differentialgleichung beschreibt tatsächlich Änderungen von Populationsgrößen bei einer Vielzahl von Wachstumsprozessen – zumindest für kleine Zeitspannen.

Wachstumsprozessen. II

Man sieht leicht, dass jede Funktion

$$P(t) = c\exp(\lambda t)$$

mit einer beliebigen Konstanten c der Wachstumsdifferentialgleichung genügt. Wir gehen davon aus, dass eben diese Lösung zu unserem Wachstumsprozess passt (rein theoretisch könnte es ja weitere Lösungen geben). Uns interessiert nun, nach welcher Zeit δ sich die Bakterienpopulation verdoppelt, also

$$2 = \frac{P(t+\delta)}{P(t)} = \frac{c\exp(\lambda(t+\delta))}{c\exp(\lambda t)} = \exp(\lambda\delta)$$

gilt. Auflösen nach δ zeigt $\delta = \frac{\log 2}{\lambda}$.

Wachstumsprozessen. III

Die Erdbevölkerung verdoppelt sich ca. alle 35 Jahre, was bei Annahme eines exponentielles Wachstumsgesetz näherungsweise auf die Vorhersage

$$P(t) = 6,93 \cdot 10^9 \exp(0,02t)$$

führt; hierbei gehen wir zum Zeitpunkt $t = 0$ also von einer Weltbevölkerung von $6,93$ Milliarden Menschen aus (nach Wikipedia zum Jahreswechsel 2010/11). Diese Vorhersage ist für lange Zeiträume aber völlig unrealistisch! (Im Jahr 2100 würden sonst mehr als 40 Milliarden und 2200 bereits mehr als 300 Milliarden Menschen leben.)

Der Informatiker Moore beobachtete, dass sich die Anzahl der Transistoren (und damit auch die Rechengeschwindigkeit) auf Mikroprozessoren ca. alle 18 Monate verdoppelt; ebenfalls einem solchen *Mooreschen Gesetz* folgend verdoppelt sich die Größe des Internet alle fünf Jahre.

Richtungsfeld

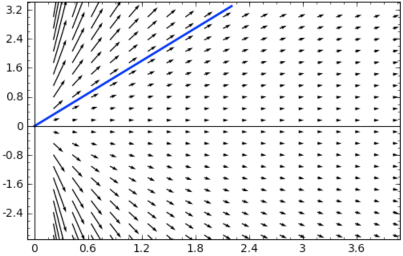
Geometrisch bestimmt eine Differentialgleichung (auch kurz **DGL**) $y' = f(x, y)$ in einer offenen und zusammenhängenden Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ ein **Richtungsfeld**:

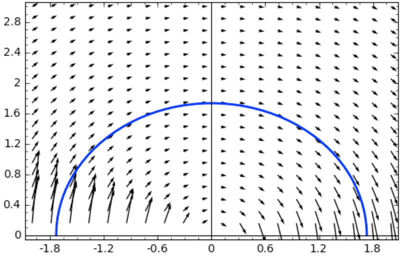
In jedem Punkt $(x, y) \in U$ wird durch $y' = f(x, y)$ eine Steigung vorgegeben und gesucht ist eine differenzierbare Funktion $y = \varphi(x)$, deren Graph in jedem seiner Punkte die vorgegebene Steigung besitzt.

In trivialen Fällen hilft diese geometrische Sichtweise bereits bei der Findung der Lösung.

Beispiele

- Die DGL
$$y' = \frac{y}{x} \qquad \text{für} \quad (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$
besitzt die 'Geraden' $y = cx$ mit $c \in \mathbb{R}$ als Lösungen (siehe das Bild unten links für das Richtungsfeld und der speziellen Lösung $y = \frac{3}{2}x$).
- Die DGL
$$y' = -\frac{x}{y} \qquad \text{für} \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$
besitzt die 'Halbkreise' $y = \sqrt{c - x^2}$ als Lösungen mit positiver Konstante c; hier existiert eine solche Lösung jedoch nur für $|x| < \sqrt{c}$ (siehe das Bild unten rechts für das zugehörige Richtungsfeld und der speziellen Lösung $y = \sqrt{3 - x^2}$).


3.2
2.4
1.6
0.8
0
-0.8
-1.6
-2.4
0
0.6
1.2
1.8
2.4
3
3.6


2.8
2.4
2
1.6
1.2
0.8
0.4
0
-1.8
-1.2
-0.6
0
0.6
1.2
1.8

Potenzreihenansatz

Als Nächstes wollen wir die Differentialgleichung

$$y' = 2xy$$

lösen. Wir machen einen **Potenzreihenansatz**: Dazu nehmen wir an, dass

$$y = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit gewissen Koeffizienten a_k gilt, dann liefert summandenweise Differentiation

$$y' = \varphi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots .$$

Potenzreihenansatz. II

Durch den Vergleich mit dem Ausdruck $2xy = 2x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$, also

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = y' = 2xy = 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \ldots \ ,$$

ergeben sich für die Koeffizienten bei den Potenzen x^k sukzessive die Bedingungen

$$a_1 = 0, \quad 2a_2 = 2a_0, \quad 3a_3 = 2a_1, \quad 4a_4 = 2a_2, \quad \ldots$$

Es zeigt sich, dass $ka_k = 2a_{k-2}$, was auf $a_k = 0$ für ungerade k führt, während für gerade k sich der Reihe nach

$$a_2 = a_0, \quad a_4 = \frac{2}{4} a_2 = \frac{1}{2} a_0, \quad a_6 = \frac{2}{6} a_4 = \frac{1}{6} a_0, \quad \ldots \quad a_k = \frac{1}{(k/2)!} a_0$$

ergibt. Damit folgt (vermöge $j = \frac{k}{2}$)

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_0 x^2 + \frac{1}{2} a_0 x^4 + \frac{1}{6} a_0 x^6 + \ldots = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{j!} = a_0 \exp(x^2).$$

Potenzreihenansatz. III

Die Probe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_0 \exp(x^2) = 2x a_0 \exp(x^2)$$

zeigt, dass unser Ansatz uns auf eine wirkliche Lösung geführt hat – *die Probe ist stets eine gute Idee beim Umgang mit DGLen!* – und dass der konstante Term $a_0 = \varphi(0)$ frei wählbar ist.

Potenzreihenansätze funktionieren allerdings nicht immer so gut wie in diesem Beispiel.

Trennung der Variablen. I

Seien I und J offene Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(y) \neq 0$ für $y \in J$ gelte. Die Differentialgleichung

$$y' = f(x)g(y)$$

heißt **Differentialgleichung mit getrennten Variablen**.

Satz 14.1

Mit den obigen Bezeichnungen seien für einen Punkt $(x_0, y_0) \in I \times J$ die Funktionen $F : I \to \mathbb{R}$ und $G : J \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t \qquad \textit{und} \qquad G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}$$

definiert. Es sei $\tilde{I} \subset I$ ein Intervall mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $F(\tilde{I}) \subset G(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $\varphi : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = f(x)g(y)$ die der **Anfangsbedingung** *$\varphi(x_0) = y_0$ genügt; diese Lösung erfüllt zudem*

$$G(\varphi(x)) = F(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in \tilde{I}. \tag{1}$$

Beispiel

Die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x} \qquad \text{für} \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

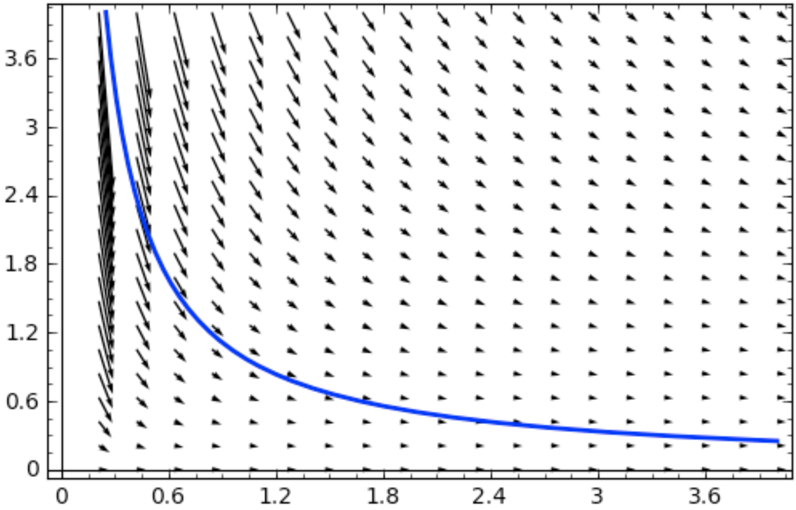
mit der Anfangswertbedingung $y(1) = c$ mit einer festen positiven Konstanten c ist zu lösen. Anwenden des Satzes liefert

$$F(x) = -\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\log x \qquad \text{und} \qquad G(y) = \int_c^y \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log \frac{y}{c}.$$

Gemäß (1) gilt

$$\log \frac{\varphi(x)}{c} = -\log x$$

und Anwenden der Exponentialfunktion führt auf die Lösung $\varphi(x) = \frac{c}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Die Gesamtheit aller Lösungen der DGL $y' = -\frac{y}{x}$ ohne Anfangsbedingung ist also gegeben durch die Hyperbelschar $xy = c$ für $c > 0$; durch jeden Punkt von $\mathbb{R}_+^2$ geht genau eine Hyperbel (siehe unten stehendes Bild mit Richtungsfeld und eingezeichneter Hyperbel $xy = 1$).


3.6
3
2.4
1.8
1.2
0.6
0
0
0.6
1.2
1.8
2.4
3
3.6

Trennung der Variablen. II

Etwas unpräzise kann man sich die Methode der Trennung der Variablen auch folgendermaßen merken: Gegeben $y' = f(x)g(y)$ bzw. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$, integriere man für $g(y) \neq 0$ den leicht umgeschriebenen Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x; \tag{2}$$

dies führt auf

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + \mathrm{Konstante}.$$

Die Nullstellen η von $g(y)$ liefern partikuläre Lösungen $y(x) = \eta$.

Beispiel

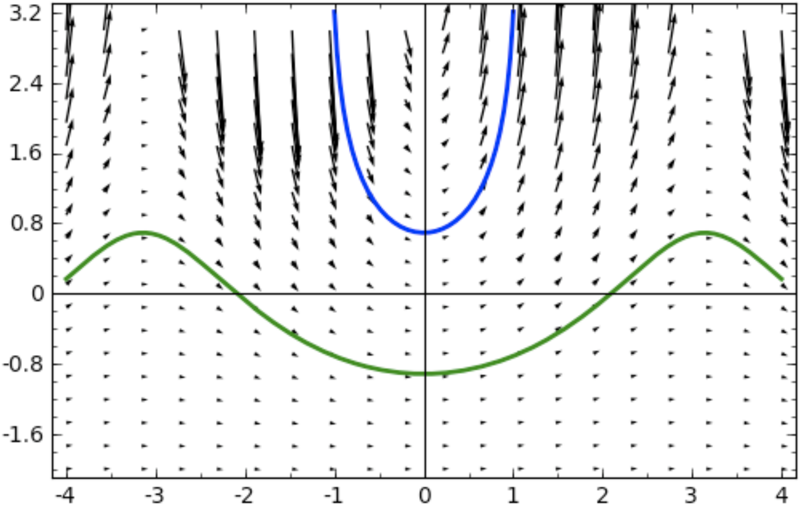
Es sei gegeben

$$y' = \exp(y)\sin(x)$$

Wir erhalten durch Integration die allgemeine Lösung

$$y = \varphi(x) = -\log(c + \cos x)$$

mit einer Konstanten c. Im unten stehenden Bild sind das Richtungsfeld und die zwei Lösungen für $c = -\frac{1}{2}$ sowie $c = \frac{3}{2}$ angegeben. Wie auch schon in vorigen Beispielen sind die Lösungen u.U. auf verschiedenen Mengen erklärbar; für eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung ist hier $c > 1$ notwendig und hinreichend.


3.2
2.4
1.6
0.8
0
-0.8
-1.6
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4