Numerische Verfahren und Grundlagen der Analysis

Rasa Steuding

Hochschule RheinMain Wiesbaden

Wintersemester 2011/12

Funktionen mehrerer Veränderlicher. I

Abstände und Normen in n-dimensionalen Räumen. I

Sei $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n-faches kartesisches Produkt der Menge der reellen Zahlen). Die Elemente sind **Vektoren** $(x_1, \ldots, x_n)$, die wir komponentenweise addieren können und mit einem reellen *Skalar* multiplizieren können; damit ist $\mathbb{R}^n$ ein ***n*-dimensionaler euklidischer Vektorraum**.

In $\mathbb{R}$ lässt sich der Abstand zwischen zwei Punkten durch den Betrag der Differenz angeben. Wie kann dies auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert werden?

Nach dem Satz des Pythagoras ist der Abstand zweier Punkte $p_1 = (x_1, y_1)$ und $p_2 = (x_2, y_2)$ des $\mathbb{R}^2$

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Dieser Abstand hängt nur von der Differenz $p_1 - p_2$ ab und wir schreiben deshalb auch $\|p_1 - p_2\|$ bzw.

$$\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Abstände und Normen in n-dimensionalen Räumen. II

Dieser Abstandsbegriff lässt sich problemlos auf den drei- bzw. sogar n-dimensionalen Raum übertragen: Für den $\mathbb{R}^n$ definieren wir die **euklidische Norm** eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)$ als

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Den **Abstand** zwischen $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir als $d(x, y) := \|x - y\|$.

Wir definieren das **Skalarprodukt** von $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Folgen in $\mathbb{R}^n$. I

Folgen sind Abbildungen $\mathbb{N} \to X$, wobei die Zielmenge bislang stets $X = \mathbb{R}$ war; nun werden wir allgemeiner $X = \mathbb{R}^n$ betrachten, also Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (oder kurz: $(x_k)_k$) von Vektoren $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$ des $\mathbb{R}^n$. *Vorsicht: k bezeichnet hier den Index der Folge und nicht die k-te Komponente eines Vektors!*

Eine Folge $(x_k)_k$ von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ **konvergiert mit Grenzwert** $a \in \mathbb{R}^n$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\|x_k - a\| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad k \geq N;$$

in diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. Damit konvergiert eine Folge $(x_k)_k$ also gegen a, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung von a alle bis auf höchstens endlich viele Folgeglieder x_k liegen! Nichtkonvergente Folgen heißen **divergent**.

Folgen in $\mathbb{R}^n$. II

Mit dem folgenden Satz übertragen sich leicht die Rechengesetze für konvergente Folgen aus der eindimensionalen Theorie:

Satz 12.1

Für eine Folge $(x_k)_k$ von Vektoren $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_{kj} = a_j \quad \textit{für} \quad j = 1, \ldots, n,$$

d.h. $(x_k)_k$ konvergiert genau dann, wenn alle Komponentenfolgen $(x_{kj})_k$ in $\mathbb{R}$ konvergieren; in diesem Fall ist der Grenzwert $a = (a_1, \ldots, a_n)$ gleich dem Vektor gebildet aus den Grenzwerten der Komponentenfolgen.

Stetige Abbildungen. I

Sind X und Y wohldefinierte Mengen, so verstehen wir unter einer Abbildung $f : X \to Y$ eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $y \in Y$ zuordnet; wir schreiben hierfür auch $y = f(x)$ und notieren diese Zuordnung oft durch $x \mapsto f(x)$. Im Folgenden werden der **Urbildbereich** X und der **Bildbereich** Y jeweils (nicht notwendig identische) euklidische Vektorräume oder Teilmengen hiervon sein. Statt von Abbildungen spricht man auch von Funktionen.

Im Folgenden sei stets $U \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ schreiben wir $y = f(x)$ mit $y = (y_1, \ldots, y_m)$ mit den **Komponentenfunktionen** $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$; kurz:

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) = x \mapsto f(x) = y &= (y_1, \ldots, y_m) \\ &= (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_1(x_1, \ldots, x_n)). \end{aligned}$$

Beispiele

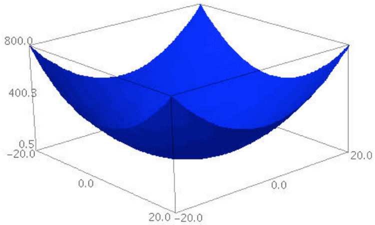
Eine Funktion ($m = 1$) von zwei Variablen ($n = 2$) kann als Oberfläche im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ interpretiert werden:

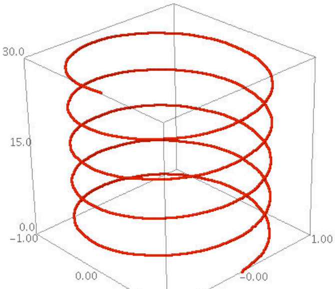
$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

liefert einen Paraboloid. Drei Funktionen ($m = 3$) einer Variablen ($n = 1$) liefern eine Kurve im Raum:

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$$

ist eine Schraubenlinie.





Stetige Abbildungen. II

Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt **stetig in** $a \in U$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in U \quad \text{mit} \quad \|x - a\| < \delta.$$

Wenn x hinreichend nahe bei a liegt, so ist $f(x)$ nahe bei $f(a)$!

Satz 12.2

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig in $a \in U$, wenn für jede Folge $(x_k)_k$ in U mit Grenzwert $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a).$$

Sei M eine Menge und f in jedem Punkt $x \in M$ stetig, dann heißt f **stetig in** M.

Man beachte, dass sich die Folgen der x_k in einem höherdimensionalen Raum $\mathbb{R}^m$ aus sehr vielen Richtungen gegen ihren Grenzwert a konvergieren können!

- Die Abstandsfunktion

$$d(\,\cdot\,,y)\,:\,\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x,y),$$

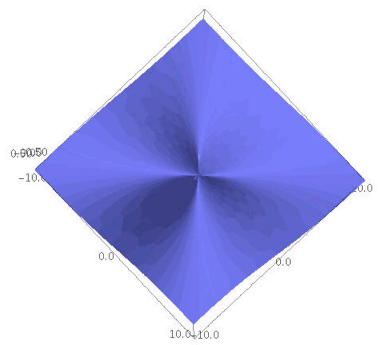
die den Abstand zu einem fixierten Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ misst, ist in jedem Punkt stetig.

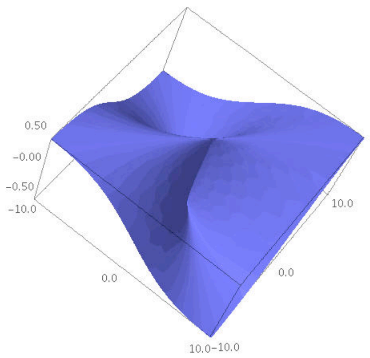
- Die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{falls} \quad x_1^2+x_2^2>0, \\ 0 & \text{falls} \quad x_1^2+x_2^2=0, \end{cases}$$

ist überall stetig mit Ausnahme des Ursprungs $(0,0)$. Die Unstetigkeit ergibt sich leicht mit der Folge $(\frac{1}{k},\frac{1}{k})_k$ und Satz 12.2. Bewegt man sich jedoch auf den Koordinatenachsen und nicht auf einer der Halbachsen auf den Ursprung zu, so offenbart sich die Unstetigkeit nicht (siehe Bilder auf der nächsten Folie).

Beispiele. II





Partielle Ableitungen. I

Wie differenziert man eine Funktion mehrerer Veränderlicher, wie etwa $f(x_1, x_2) := \exp(x_1 + x_2^3)$?

Im Folgenden sei stets $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen* und $f : U \to \mathbb{R}$. Ferner bezeichne $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (mit einer 1 in der j-ten Komponente und lauter Nullen sonst). Dann heißt f im Punkt $x \in U$ **partiell differenzierbar in der j-ten Koordinatenrichtung**, falls der Grenzwert

$$D_j f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

existiert (wobei sich der Grenzwert nur auf solche reellen $h \neq 0$ bezieht, für die $x + he_j \in U$ liegt); die Größe $D_j f(x)$ nennt man in diesem Fall die **j-te partielle Ableitung von f in x**. Wir verwenden neben $D_j f$ auch die Notationen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ bzw. f_{x_j}.

Beispiel

Die erste partielle Ableitung von

$$f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := \exp(x_1 + x_2^2)$$

berechnet sich als

$$\begin{aligned} D_1 f(x_1, x_2) &= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x_1 + h + x_2^2) - \exp(x_1 + x_2^2)}{h} \\ &= \exp(x_1 + x_2^2) \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\exp(h) - 1)}_{=1} \end{aligned}$$

(man beachte: $x = (x_1, x_2)$ addiert mit $he_1 = (h, 0)$ gibt $x + he_1 = (x_1 + h, x_2)$)

Partielle Ableitungen. II

Die partiellen Ableitungen einer Funktion f lassen sich vermöge

$$\zeta \mapsto f_j(\zeta) := f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \zeta, x_{j+1}, \ldots x_n)$$

als die gewöhnlichen Ableitungen von Funktionen einer Variablen interpretieren, denn

$$D_j f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_j(x_j + h) - f_j(x_j)}{h} = f_j'(x_j).$$

Beispiel: Die zweite partielle Ableitung von $f(x_1, x_2) = \exp(x_1 + x_2^2)$ ist

$$D_2 f(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \exp(x_1 + x_2^2) = 2x_2 \exp(x_1^2 + x_2^2).$$

Die Variable x_1 wird bei der partiellen Ableitung nach x_2 wie eine numerische Konstante behandelt!

Partielle Ableitungen. III

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt **partiell differenzierbar in** U, falls alle partiellen Ableitungen $D_j f(x)$ in allen Punkten $x \in U$ existieren. Sind zusätzlich alle $D_j f : U \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f **stetig partiell differenzierbar**.

Beispiel: Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$(x, y) \mapsto g(x, y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie besitzt die partiellen Ableitungen

$$g_x(x, y) = y\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \quad g_y(x, y) = x\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

für $(x, y) \neq (0, 0)$. Diese sind stetig nach $(x, y) = (0, 0)$ fortsetzbar mit jeweiligem Wert null. Also ist g stetig partiell differenzierbar.

Partielle Ableitungen. IV

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Sind sämtliche partiellen Ableitungen $D_j f : U \to \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar, so heißt f **zweimal partiell differenzierbar**.

Allgemeiner mit $k \in \mathbb{N}$: Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt $(k+1)$**-mal partiell differenzierbar**, wenn sie k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen k**-ter Ordnung**

$$D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f : U \to \mathbb{R}$$

partiell differenzierbar sind; darüber hinaus heißt f $(k+1)$**-mal stetig partiell differenzierbar**, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k+1$ stetig sind.

Eine wichtige Frage: Kommt es auf die Reihenfolge der partiellen Differentiation an oder gilt $D_i D_j f = D_j D_i f$?

Beispiel: Für die Funktion g aus dem letzten Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} D_2 D_1 g(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(D_1 g(he_2) - D_1(0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h \frac{-h^4}{h^4} = -1, \\ D_1 D_2 g(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(D_2 g(he_1) - D_2(0)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h \frac{+h^4}{h^4} = +1; \end{aligned}$$

bei zweimal partiell differenzierbaren Funktionen ist die Differentiation also nicht unbedingt *kommutativ*! Stetigkeit macht den feinen Unterschied:

Satz 12.3

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

$$D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a) \qquad \text{für alle} \quad a \in U, 1 \le i, j \le n.$$