

Numerische Verfahren und Grundlagen der Analysis

Rasa Steuding

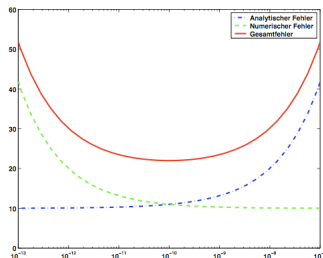
Hochschule RheinMain Wiesbaden

Wintersemester 2011/12

Wiederholung: Fehlerbetrachtung. Interpolation

Gesamtfehler

Zur Ermittlung des Gesamtfehlers versucht man eine vom Rundungsfehler unabhängige obere Schranke für den gesamten Verfahrensfehler und eine vom Verfahrensfehler unabhängige obere Schranke für den gesamten Rundungsfehler zu gewinnen. Addition beider Schranken liefert eine obere Schranke für den Gesamtfehler.



Der Gesamtfehler wird minimal, wenn Rundungsfehler und Verfahrensfehler miteinander vergleichbar sind.

Beispiel: Numerische Ableitung

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die Ableitung $f'(x)$ kann durch den Differenzenquotient approximiert werden:

$$f'(x) \approx \Delta f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

mit $0 < h \approx 0$.

Bei der Wahl von h ist zu beachten: bei der Auswertung des Zählers tritt unter Umständen ein Fehler auf, der durch die Division durch h stark vergrößert wird. Daher sollte man h nicht zu klein wählen.

Zur Vereinfachung betrachten Sie nur den Rundungsfehler, der bei der Differenz entsteht und den Fehler, der durch die Diskretisierung gemacht wird.

Verfahrens- und Rundungsfehler

Laut der Taylorformel gilt

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2, \quad \xi \in [x, x+h],$$

woraus folgt

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2!}h^2$$

und für den Verfahrensfehler

$$V_{\Delta} := |f'(x) - \Delta f(x)| \leq \left| \frac{f''(\xi)}{2!}h \right| = c_1 h.$$

Vereinfachend nehmen wir an, dass beim Berechnen eines Funktionswerts ein Fehler in der Größenordnung von ε gemacht wird. Für den Rundungsfehler gilt:

$$R_{\Delta} := \left| \frac{(f(x+h) \pm \varepsilon) - (f(x) \pm \varepsilon)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{h}.$$

Minimierung des Gesamtfehlers

Wir wollen h so wählen, dass der Gesamtfehler

$$G = V + R \approx c_1 h + \frac{2\varepsilon}{h}$$

minimal ist. Dazu setzen wir die Ableitung der Funktion $f(h) = c_1 h + \frac{2\varepsilon}{h}$ gleich Null und erhalten

$$f'(h) = c_1 - \frac{2\varepsilon}{h^2}.$$

f' hat eine Nullstelle bei

$$h = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{c_1}}.$$

Bei diesem Verfahren wähle man $h \approx \sqrt{\varepsilon}$. Der Gesamtfehler ist dann von Größenordnung $\sqrt{\varepsilon}$.

Die **Kondition** der Funktion $y = f(x)$

$$\kappa_f(x) := \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

ist eine Maßzahl für die Sensitivität des Resultats y in Bezug auf die Eingabe x .

Wir sprechen von einer bezüglich x **gut konditionierten** Aufgabenstellung $f(x)$, wenn kleine relative Eingabefehler ε_x bei exakter Arithmetik, d.h. ohne Einfluss von Rechenfehlern, zu vergleichsweise kleinen relativen Fehlern ε_y im Resultat y führen. In diesem Fall haben die relativen Rundungsfehler ε_x und ε_y die gleiche Größenordnung. Anderenfalls liegt **schlechte Kondition** von f an der Stelle x vor.

Beispiele:

- Die Kondition der Funktion $f(x) = \exp(x)$ lautet

$$\kappa_{\exp} = |x|$$

und f ist für betragsmäßig nicht zu große Werte von x gut konditioniert.

- Die Umkehrfunktion $f(x) = \log(x)$ hat die Kondition

$$\kappa_{\log} = |1/\log(x)|$$

und ist für $x \approx 1$ schlecht konditioniert.

Eine (numerisch) **stabile** Berechnungsmethode vergrößert nicht die relativen Eingabefehler einer gut konditionierten Aufgabenstellung $y = f(x)$. Eine Berechnungsmethode, die trotz kleiner Kondition κ_f , große relative Fehler im Ergebnis produziert, heißt (numerisch) **instabil**.

Beispiel: Der Ausdruck $f(x) := 1 - \sqrt{1 - x^2}$ soll für kleine Werte $x \approx 0$ numerisch berechnet werden. Diese Aufgabenstellung ist wegen

$$\kappa_f = \left| \frac{x^2}{(1 - \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}} \right| \rightarrow 2 \text{ mit } x \rightarrow 0$$

gut konditioniert. Die numerische Auswertung des Ausdrucks führt allerdings zu Ergebnissen mit extrem großen relativen Rundungsfehlern. Eine numerisch stabile Berechnungsmethode erhalten wir, wenn wir den Ausdruck durch Erweiterung von Zähler und Nenner

$$1 - \sqrt{1 - x^2} = \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

umformen und die Auslöschung so umgehen.

Auslöschung. I

Wir berechnen die Exponentialfunktion $\exp(x)$ mittels Reihenentwicklung:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Wir addieren dazu die Summanden $y = x^k/k!$ mit $k \geq 0$ auf einem Rechner mit der Maschinengenauigkeit 10^{-14} solange, bis sich der Rückgabewert z nicht mehr ändert.

x	z	e^x
1	<u>2.7182818</u> $\cdot 10^0$	$2.7182818 \cdot 10^0$
20	<u>4.8516531</u> $\cdot 10^8$	$4.8516520 \cdot 10^8$
-10	-1.6408609 $\cdot 10^{-4}$	$4.5399930 \cdot 10^{-5}$
-20	1.2029660 $\cdot 10^0$	$2.0611537 \cdot 10^{-9}$

Die Methode liefert für positive Werte $x > 0$ korrekte Ergebnisse z und für $x < 0$ falsche Werte.

k	$y = \frac{x^k}{k!}$
0	1
1	-20
2	200
$\vdots$	$\vdots$
19	$-0.4309980412 \cdot 10^8$
20	$0.4309980412 \cdot 10^8$
$\vdots$	$\vdots$
60	$0.1385558575 \cdot 10^{-3}$
$\vdots$	$\vdots$
70	$0.9855863063 \cdot 10^{-9}$
$\vdots$	$\vdots$
99	$-0.6791503299 \cdot 10^{-27}$
$\vdots$	$\vdots$

Die Summanden $y = (-20)^k/k!$ für die Berechnung des Funktionswerts $\exp(-20)$ nehmen zunächst immer größer werdende Werte mit wechselndem Vorzeichen an, die mit größer werdendem k wegen der Fakultät $k!$ im Nenner gegen Null konvergieren. Die Summe enthält somit auch Differenzen zweier nahezu gleich großer, bereits mit Rundungsfehlern behafteter Zahlen.

Die signifikanten Stellen sind restlos **ausgelöscht** und die Summe z um weicht Größenordnungen von dem korrekten Resultat ab.

Der Einfluss der Rundungsfehler kann minimiert werden, wenn wir die Summanden $y = x^k/k!$ in der Reihenfolge aufsteigender Beträge addieren.

Zu gegebener Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und gegebenen Stützstellen

$$a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$$

soll eine "einfache" Funktion $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) konstruiert werden.

Anwendungen:

- f ist nur an diskreten Punkten bekannt (Messwerte), aber eine geschlossene Formel für f ist auf ganz $[a, b]$ erwünscht.
- f ist "kompliziert" und soll durch eine "einfache" Funktion approximiert werden.

Satz 11.1

Zu vorgegebenen Stützstellen (x_j, y_j) , $0 \leq j \leq n$, gibt es genau ein **Interpolationspolynom** $P_n(x)$ vom Grad höchstens n , das $P(x_j) = y_j$ erfüllt. Es kann rekursiv über

$$P_0(x) = y_0$$

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + (y_{k+1} - P_k(x_{k+1})) \prod_{j=0}^k \frac{x - x_j}{x_{k+1} - x_j}$$

ermittelt werden.

Wir bestimmen das Polynom vom Grad 2, das durch die Punkte $(0, 1)$, $(2, 3)$ und $(3, 0)$ geht:

$$P_0(x) = 1$$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_0(x) + (y_1 - P_0(x_1)) \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= 1 + (3 - 1) \cdot \frac{x - 0}{2 - 0} = 1 + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x) + (y_2 - P_1(x_2)) \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= 1 + x + (0 - 4) \cdot \frac{x - 0}{3 - 0} \cdot \frac{x - 2}{3 - 2} \\ &= -\frac{4}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 1. \end{aligned}$$

Newtonsche Interpolationspolynom

Wir wählen die Indizierung der Stützstellen wie folgt: $x_j = x_0 + jh$, $0 \leq j \leq n$ mit der festen Schrittweite h . Das Interpolationspolynom nach dem Ansatz von Newton nimmt die Gestalt

$$p(x) = f(x_0) + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

an, wobei

$$\Delta^0 y_j := y_j$$

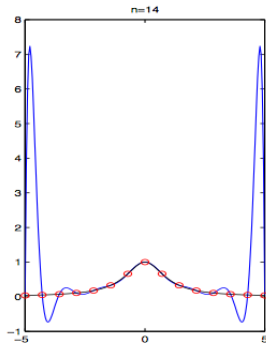
$$\Delta^m y_j := \Delta^{m-1} y_{j+1} - \Delta^{m-1} y_j, \quad (m \geq 1).$$

Für die Stützstellen $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$ erhält man

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) \\ &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + \frac{2 - 0}{1}(x - (-1)) + \frac{(0 - 2) - (2 - 0)}{2 \cdot 1^2}(x - (-1))(x - 0) \\ &= 2 - 2x^2. \end{aligned}$$

Phänomen von Runge.

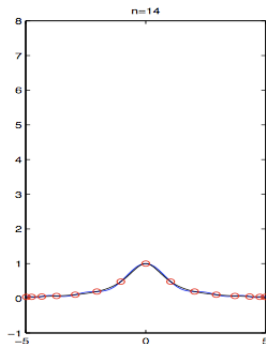
Kann durch Erhöhung der Anzahl der Stützpunkte eine immer bessere Übereinstimmung mit einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ erreicht werden? Im Allgemeinen wird die Güte der Approximation nicht unbedingt besser (zumindest nicht, wenn die Stützstellen *gleichmäßig* verteilt sind, wie das folgende Beispiel zeigt:



Das Interpolationspolynom zu $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ weist am Rand starke Oszillationen

Verbesserungen

Das Verhalten kann etwas verbessert werden, wenn die Stützstellen am Rand dichter als in der Mitte gewählt werden (**Tschebyscheff Interpolation**).



Das prinzipielle Problem bleibt trotzdem. Deshalb verwendet man in der Praxis meistens stückweise Polynome von kleinem Grad - so-genannte **Splines**.

"Secret Sharing" (Shamir, 1979)

Angenommen, man möchte ein Geheimnis s auf n Personen verteilen. Man wählt ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ vom Grad $n - 1$ mit $a_0 = s$ und zufälligen Koeffizienten a_k , $1 \leq k \leq n - 1$. Nun verteilt man die Funktionswerte $y_k = p(k)$, $1 \leq k \leq n$ an n Personen, die sich das Geheimnis teilen sollen.

Alle zusammen können mittels Interpolation aus Wertepaaren (k, y_k) , $1 \leq k \leq n$ das Polynom $p(x)$ und damit das Geheimnis $s = p(0)$ rekonstruieren. Fehlt auch nur eine Person, so ist die Rekonstruktion nicht möglich.

Man kann auch das Geheimnis so verteilen, dass $r \leq n$ Personen (mit einem zuvor festgelegtem r) ausreichen, um das Geheimnis zu rekonstruieren.