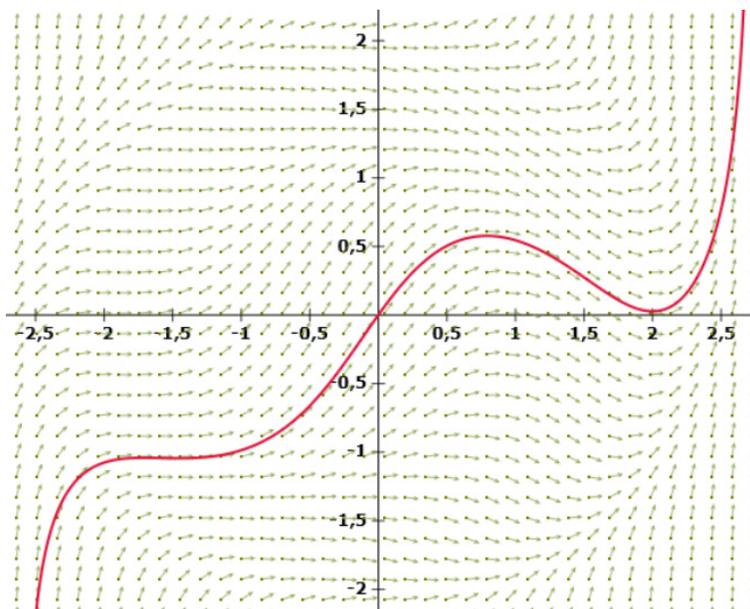


VORLESUNGSSKRIPT

GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
UND
DYNAMISCHE SYSTEME

PROF. DR. HAGEN KNAF
STUDIENGANG ANGEWANDTE MATHEMATIK
HOCHSCHULE RHEINMAIN

WS 2020/21



Hinweis

Die in diesem Skript durch den Autor veröffentlichten Inhalte unterliegen dem deutschen Urheberrecht und Leistungsschutzrecht. Jegliche vom deutschen Urheber- und Leistungsschutzrecht nicht zugelassene Verwertung bedarf der vorherigen schriftlichen Zustimmung des Autors. Inhalte und Rechte Dritter sind nach bestem Wissen des Autors als solche gekennzeichnet.

Es ist nicht erlaubt, das Skript oder Teile daraus zu bearbeiten, zu übersetzen, zu kopieren oder in elektronischer Form zu speichern und an andere Personen weiterzugeben, weder in Kopie, noch auf elektronischem Wege per Email, auf Speichermedien, über Datenbanken oder über andere Medien und Systeme. Lediglich die Herstellung von Kopien und Downloads für den persönlichen, privaten und nicht kommerziellen Gebrauch ist erlaubt.

Vorwort

Die Vorlesung »Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme« orientiert sich an den beiden Büchern [Heu] und [Wal], wobei das ausführliche und ausgesprochen abwechslungsreich geschriebene Buch von Harro Heuser besonders zu empfehlen ist. Selbstverständlich kann in der zur Verfügung stehenden Zeit keines der beiden Bücher inhaltlich vollständig dargestellt werden. Das vorliegende Skript ist eine Art die Vorlesung begleitende Erzählung, die das Nachbereiten des behandelten Stoffs unterstützen soll.

Das Skript entspricht nicht genau der Vorlesung: In letzterer gibt es ungeplante Exkurse und Beispiele, die sich zum Teil aufgrund von Fragen ergeben, sowie spontane Einfälle des Dozenten, die sich alle nicht im Skript wiederfinden.

Dieses Skript ist kein Ersatz für ein Lehrbuch wie zum Beispiel die beiden oben genannten. Das Arbeiten mit Fachliteratur ist eine in jedem Studium zu erlernende Kompetenz und wird daher auch in dieser Vorlesung von den Studierenden erwartet.

Dieses Skript ist keine Auflistung des Prüfungsstoffs: Ziel der Vorlesung ist unter anderem Fähigkeiten wie das Modellieren mit Differentialgleichungen oder die Analyse einer Differentialgleichung zu entwickeln. Dies umfasst die Anwendung dieser Fähigkeiten auf in der Vorlesung nicht behandelte Situationen und Beispiele. Auch deshalb ist das Arbeiten mit Fachliteratur wichtig.

GRAFIKEN: Die im Skript vorhandenen Grafiken wurden mit zwei Werkzeugen erstellt:

- dem online unter <https://www.desmos.com/> verfügbaren *Desmos Grafikrechner*,
- der Software *Matlab* des Unternehmens MathWorks Inc..

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Grundbegriffe	5
1.1	Einführende Beispiele	5
1.2	Der Begriff »Differentialgleichung«	11
2	Differentialgleichungen erster Ordnung	17
2.1	Das Richtungsfeld und das Polygonzugverfahren	17
2.2	Elementare analytische Lösungsmethoden	22
2.3	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	37
2.4	Modellieren mit Differentialgleichungen	47
2.5	Modellierung von Wachstumsprozessen	56
2.6	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	73
3	Lineare Differentialgleichungen	87
3.1	Grundlegendes	87
3.2	Homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten I	90
3.3	Komplexwertige Lösungsfunktionen	104
3.4	Homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten II	112
3.5	Inhomogene DGLen mit konstanten Koeffizienten	128
4	Systeme von DGLen erster Ordnung	147
4.1	Motivation und Grundbegriffe	147
4.2	Grundlagen linearer DGL-Systeme	153
4.3	Die matrixwertige Exponentialfunktion	161
4.4	Die Eigenwertmethode	172
4.5	Kompartimentmodelle	192
4.6	Dynamische Systeme	198

1 Motivation und Grundbegriffe

1.1 Einführende Beispiele

DIE SCHLEPPKURVE (TRAKTRIX)

Auf einem See mit völlig ruhigem Wasserspiegel schwimme ein Boot, das über eine gespannte Leine der Länge $\ell > 0$ mit einem Fußgänger am Ufer verbunden ist. Das Boot befindet sich zunächst in Ruhe. Der Fußgänger läuft nun in eine bestimmte Richtung los, wobei die Leine ständig gespannt bleibt. Wie bewegt sich das Boot?

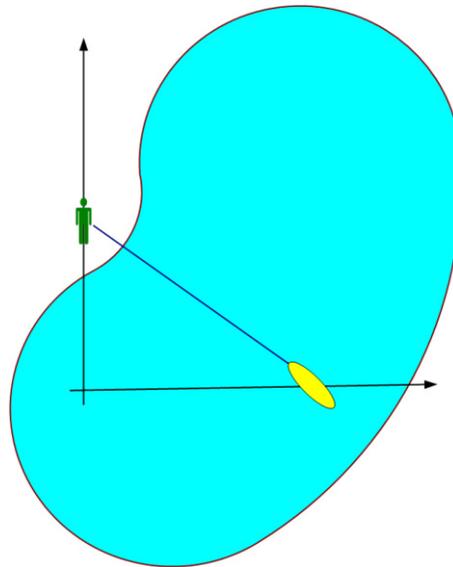


Abbildung 1: Schleppkurvenproblem

Falls der Fußgänger sich in Richtung der Leine vom Boot wegbewegt, bewegt sich dieses auf einer Geraden hinter dem Fußgänger her, bis es auf das Ufer trifft. Diesen langweiligen Fall schließen wir im Weiteren aus.

Um das Problem mathematisch zu beschreiben, kann man die euklidische Ebene \mathbb{R}^2 benutzen, da die Seeoberfläche eben ist und der Fußgänger im Wesentlichen parallel zur Seeoberfläche zieht. Die Positionen von Boot und Fußgänger sind dann Punkte im \mathbb{R}^2 .

Um die Änderungen der Bootsposition zu beschreiben, muss man ein Koordinatensystem einführen. Die Koordinaten seien mit x und y bezeichnet.

Es ist praktisch dies in folgender Weise zu tun: Die Hochachse (Ordinate, y -Achse) sei die Gerade, auf der sich der Fußgänger bewegt. Die Rechtsachse (Abszisse, x -Achse) stehe senkrecht auf der Hochachse und sei so festgelegt, dass die Anfangsposition des Bootes ein Punkt $(x_1, 0)$ mit $x_1 > 0$ ist. Ebenso sei die Anfangsposition des Fußgängers ein Punkt der Form $(0, y_0)$, $y_0 \geq 0$ und dieser bewege sich in positiver Ordinatenrichtung.

Wir nehmen nun an, dass es eine Funktion

$$p : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$$

gibt, die die Eigenschaft besitzt, dass ihr Graph

$$\text{Graph}(p) = \{(x, p(x)) : x \in [x_0, x_1]\}$$

gerade die Bahnkurve des Bootes beschreibt, wenn sich der Fußgänger von y_0 nach y_1 bewegt.

Die Gerade durch die Fußgängerposition $(0, y)$ und die Bootsposition $(x, p(x))$ ist stets eine Tangente an die Bahnkurve. Diese Tangente besitzt die Steigung

$$m(x) = -\frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{x}.$$

Nimmt man nun zusätzlich an (eine vertretbare Annahme!), dass die Funktion p differenzierbar ist, so muss also gelten:

$$\forall x \in [x_0, x_1] \quad p'(x) = -\frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{x}. \quad (1)$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Startbedingung $p(x_1) = 0$ ergeben

$$p(x) = \int_x^{x_1} \frac{\sqrt{\ell^2 - \tau^2}}{\tau} d\tau.$$

Ein Blick in eine Integraltabelle liefert schließlich die Lösung

$$p(x) = \sqrt{\ell^2 - x_1^2} - \ell \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - x_1^2}}{x_1}\right) + \ell \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{\ell^2 - x^2}. \quad (2)$$

Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von p im Fall $\ell = 1$, $y_0 = 0$ und $x_1 = 1$.

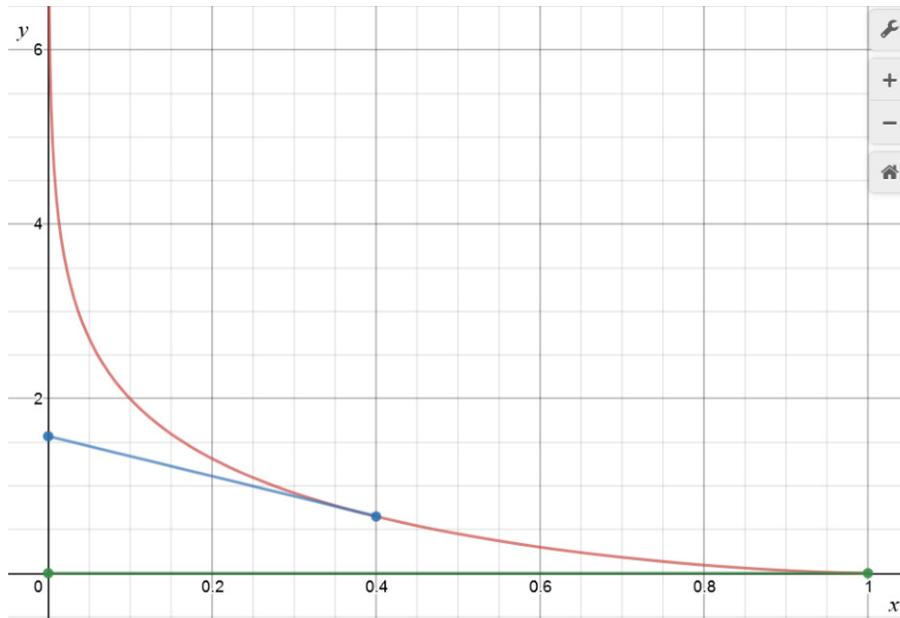


Abbildung 2: Schleppkurve mit $\ell = 1$, $x_1 = 1$, $y_0 = 0$

FREIER FALL OHNE LUFTREIBUNG

Ein Körper der Masse $m > 0$ wird von einem Turm der Höhe $h_0 > 0$ fallen gelassen. Der Fall des Körpers bis zu seinem Aufschlag soll mathematisch beschrieben werden. Dazu geht man wie folgt vor:

- Der zu beschreibende Vorgang ist zeitabhängig. Zum Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ wird der Körper fallen gelassen, zum Zeitpunkt $t_1 > t_0$ erfolgt der Aufschlag.
- Die Höhe des Körpers über dem Erdboden ist eine Funktion der Zeit:

$$h : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto h(t).$$

- Man macht die Annahme, dass die Funktion h differenzierbar ist. Für ihre Ableitung an einer Stelle $t \in [t_0, t_1]$ gilt nach Definition

$$h'(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta) - h(t)}{\Delta},$$

die Ableitung $h'(t)$ kann also als Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t gedeutet werden. Da die Höhe mit der Zeit abnimmt, gilt genauer $-h'(t) = v(t)$, wobei $v : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion ist, die jedem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit des Körpers zuordnet. Hierbei wird die Geschwindigkeit als nicht negative Größe angesehen.

- Aus der Physik ist bekannt, dass $v(t) = g(t - t_0)$ gilt, wobei $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$ die sogenannte Erdbeschleunigung ist; sie ist eine Naturkonstante, die sich experimentell bestimmen lässt. Man setzt nun also voraus, dass die Zeit t in der vorliegenden Beschreibung in Sekunden (s) und die Höhe über dem Erdboden in Metern (m) gemessen wird.
- Zusammenfassend gilt für die gesuchte Funktion h die Gleichung

$$h'(t) = -g(t - t_0), \quad (3)$$

sowie die Bedingung $h(t_0) = h_0$, sie ist also eine Stammfunktion der Funktion $-g(t - t_0)$.

- Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$h(t) = \int_{t_0}^t -g(s - t_0) ds = -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + c.$$

Aus der Bedingung $h(t_0) = h_0$ ergibt sich unmittelbar $c = h_0$.

- Für den Aufschlagszeitpunkt gilt $h(t_1) = 0$, woraus sich

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} + t_0$$

ergibt.

FREIER FALL MIT LUFTREIBUNG

Man betrachtet die gleiche Situation wie oben, es soll aber nun die Reibung der Luft am fallenden Körper berücksichtigt werden.

- Aus der Physik ist bekannt, dass der Luftwiderstand eines bewegten Körpers – eine Kraft – bei niedrigen bis moderaten Geschwindigkeiten proportional zur Geschwindigkeit der Bewegung ist:

$$F_L(t) = \rho v(t),$$

wobei $\rho > 0$ eine von der Form des Körpers und der Luftdichte abhängige Konstante ist, die man experimentell ermitteln kann.

- Der Luftwiderstand ist der Gravitationskraft, die der Körper erfährt, entgegen gerichtet. Letztere ist

$$F_G = gm$$

also eine Konstante.

Insgesamt wirkt auf den Körper zum Zeitpunkt $t \in [t_0, t_1]$ die Kraft

$$F(t) = mg - F_L(t) = mg - \rho v(t).$$

- Nach dem zweiten Newton'schen Gesetz gilt

$$F(t) = mv'(t),$$

wenn man voraussetzt, dass die Geschwindigkeit eine differenzierbare Funktion der Zeit ist.

- Insgesamt ergibt sich also die Gleichung

$$mv'(t) = mg - \rho v(t) \tag{4}$$

für die Geschwindigkeitsfunktion v und damit

$$mh''(t) = mg - \rho h'(t) \tag{5}$$

für die Höhenfunktion.

Es gelten die Bedingungen $h(t_0) = h_0$ und $v(t_0) = h'(t_0) = 0$, falls man annimmt, dass der Körper nicht nach unten *geworfen* wird.

- Um zu einer Lösung der Gleichung (4) zu kommen, muss man intelligent raten: Aufgrund der Tatsache, dass die Exponentialfunktion die Eigenschaft $(e^t)' = e^t$ besitzt, liegt es nahe Funktionen der Form $v(t) = ae^{bt} + c$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Für diese gilt:

$$v'(t) = abe^{bt} = b(ae^{bt} + c) - bc = bv(t) - bc.$$

Vergleicht man mit Gleichung (4), so sieht man:

$$b = -\frac{\rho}{m}, \quad c = \frac{mg}{\rho}.$$

Dies liefert

$$v(t) = ae^{-\frac{\rho}{m}t} + \frac{mg}{\rho}.$$

Aus der Nebenbedingung $v(t_0) = 0$ erhält man

$$a = -\frac{mg}{\rho}e^{\frac{\rho}{m}t_0},$$

also

$$v(t) = \frac{mg}{\rho}(1 - e^{\frac{\rho}{m}(t_0-t)}). \quad (6)$$

Interessant ist, dass die Funktion v nach oben durch $\frac{mg}{\rho}$ beschränkt ist: Wie hoch der Turm auch immer ist, der fallende Körper wird diese Geschwindigkeit nicht überschreiten.

Ein mit ausgebreiteten Armen in Bauchlage fallender Mensch erreicht im unteren, dichten Teil der Erdatmosphäre eine Maximalgeschwindigkeit von etwa 200 km/h. Der Geschwindigkeitsweltrekord beim freien Fall von Menschen wird von dem Extremsportler Felix Baumgartner gehalten: Er erreichte im Oktober 2012 nach dem Absprung aus einem Heliumballon in 39 km Höhe eine Geschwindigkeit von 1341,9 km/h.

- Da h eine Stammfunktion von v ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{t_0}^t \frac{mg}{\rho}(1 - e^{\frac{\rho}{m}(t_0-s)}) ds \\ &= \frac{mg}{\rho}((t - t_0) - (-\frac{m}{\rho}e^{\frac{\rho}{m}(t_0-t)} + \frac{m}{\rho}e^{\frac{\rho}{m}(t_0-t_0)})) + c \\ &= \frac{mg}{\rho}(t - t_0) + \frac{m^2g}{\rho^2}(e^{\frac{\rho}{m}(t_0-t)} - 1) + c. \end{aligned}$$

Wegen der Nebenbedingung $h(t_0) = h_0$ ist $c = h_0$.

Vergleicht man die letzten beiden Beispiele, so fallen folgende Tatsachen auf: Im ersten Beispiel kann man die gesuchte Funktion h systematisch bestimmen und muss nicht wie im zweiten Beispiel raten. Dieses Raten hat im zweiten Beispiel auch die Konsequenz, dass man nicht sicher ist, ob man *alle* möglichen Funktionen h bestimmt hat. Da die Funktionen v und h einen Naturvorgang beschreiben, liegt es nahe zu glauben, dass sie eindeutig bestimmt sind, mathematisch bewiesen wurde das hier aber nicht.

Im Hinblick auf die Vorlesung zeigen die drei Beispiele: In der angewandten Mathematik kommen Situationen vor, in denen eine (mehrfach) differenzierbare Funktion gesucht ist, die zusammen mit ihren Ableitungen als Funktionen eine bestimmte Gleichung erfüllen. Zusätzlich können an die Funktion

und ihre Ableitungen noch Anforderungen an die Funktionswerte an einem bestimmten Punkt ihres Definitionsbereichs gestellt sein.

1.2 Der Begriff »Differentialgleichung«

KONVENTION FÜR DIE SCHREIBWEISE VON FUNKTIONEN

Das Lösen von Differentialgleichungen erfordert es mit Funktionen zu rechnen. Dabei wird eine Funktion als *ein* mathematisches Objekt angesehen, im Gegensatz zu der Sichtweise einer Funktion als eine Art »unendlicher Wertetabelle«. Um diese Betrachtungsweise deutlich zu machen, wird bei den Symbolen für Funktionen die explizite Nennung der Variablen (auch als Argument bezeichnet) unterdrückt, falls dies ohne Missverständnisse und Mehrdeutigkeiten zu erzeugen möglich ist. Dies entspricht auch der Tatsache, dass die Bezeichnung der Variablen einer Funktion beliebig wählbar ist, die Funktion selbst ändert sich dadurch nicht.

Konkret wird für eine Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t \mapsto x(t)$ also das Symbol x und nicht $x(t)$ verwendet. Bei Funktionen für die Standardsymbole existieren, wie der Exponentialfunktion oder der Sinusfunktion, lässt sich allerdings die Nennung der Variablen nicht vermeiden.

KONVENTION ZUR SCHREIBWEISE VON ABLEITUNGEN

Ist

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^m, t \mapsto x(t),$$

$I \subseteq \mathbb{R}$, eine k mal differenzierbare Funktion, so werden ihre Ableitungen mit x' , x'' , $x^{(3)}$, ..., $x^{(k)}$ bezeichnet; es ist also

$$x' = \frac{dx}{dt}, x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, x^{(k)} = \frac{d^kx}{dt^k}.$$

DEFINITION 1.1: *Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ ist eine Gleichung der Form*

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0, \tag{7}$$

wobei

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}, (t, x_1, \dots, x_{n+1})^T \mapsto F(t, x_1, \dots, x_{n+1}),$$

eine reellwertige Funktion in $n + 2$ Variablen mit einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ ist.

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine n -mal differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, mit den Eigenschaften:

- für alle $t \in I$ ist $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in D$,
- für alle $t \in I$ gilt $F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$.

BEISPIELE:

1. Die Gleichung (1) aus Abschnitt 1.1 lässt sich in der Form

$$p' + \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t} = 0$$

schreiben, ist also eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung 1. Die Variable x wurde dabei in t umbenannt. Es ist

$$F : [-\ell, \ell] \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x_1, x_2) \mapsto x_2 + \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t}.$$

2. Die Gleichung (3) aus Abschnitt 1.1 lässt sich in der Form

$$x' + g(t - t_0) = 0$$

schreiben; es handelt sich also um eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung 1 mit

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x_1, x_2) \mapsto g(t - t_0) + x_2.$$

3. Die Gleichung (5) aus Abschnitt 1.1 dagegen führt zu einer gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung 2:

$$mx'' + \rho x' - mg = 0.$$

Hier ist

$$F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, (t, x_1, x_2, x_3) \mapsto mx_3 + \rho x_2 - mg.$$

4. Die Differentialgleichung

$$x' - 2\sqrt{x} = 0$$

besitzt die Ordnung 1 und die zugehörige Funktion F ist

$$F(t, x_1, x_2) = x_2 - 2\sqrt{x_1}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}$.

Man errät leicht eine Lösung:

$$x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2.$$

Auch die Nullfunktion $x = 0$ ist eine Lösung. Aus beiden Lösungen kann man unendlich viele weitere gewinnen: Es sei $a > 0$ und $x_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$x_a(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t < a \\ t^2 & \text{falls } t \geq a \end{cases}$$

definiert. Die Funktion x_a ist an der »Klebestelle« $t = a$ differenzierbar und löst die Differentialgleichung.

BEMERKUNGEN:

1. Das Adjektiv »gewöhnlich« bezieht sich darauf, dass in der Differentialgleichung Funktionen einer Variablen und die Ableitungen nach derselben auftreten, im Gegensatz zu Funktionen mehrerer Variabler und partiellen Ableitungen nach denselben.
2. Die Forderung, dass der Definitionsbereich einer Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ stets ein Intervall sein soll, hat pragmatische Gründe, die im Lauf der Vorlesung klar werden.
3. Ist $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung einer Differentialgleichung und $J \subset I$ ein Intervall, so ist auch die Einschränkung $x|_J$ eine Lösung der Differentialgleichung. Man sagt dann auch die Lösung x setzt die Lösung $x|_J$ von J auf I fort.
4. Die letzte Bemerkung zeigt, dass es sinnvoll ist nach Lösungen mit möglichst großem Definitionsbereich zu suchen.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung kann unlösbar sein: Man betrachte beispielsweise

$$(x')^2 + e^x = 0.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu $(x')^2 = -e^x$, wobei die linke Seite nicht negativ, die rechte Seite aber stets negativ ist. Eine Lösung kann also nicht existieren.

In der Praxis treten bestimmte Formen von Differentialgleichungen besonders häufig auf; sie bekommen daher eigene Namen:

DEFINITION 1.2: Eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt autonom, falls die Variable der gesuchten Lösungen (unabhängige Variable; hier t) in der Gleichung nicht explizit erscheint:

$$F(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0. \quad (8)$$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ heißt explizit, falls sie die Form

$$x^{(n)} - f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) = 0 \quad (9)$$

mit einer Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, (t, x_1, \dots, x_n) \mapsto f(t, x_1, \dots, x_n),$$

besitzt, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

BEMERKUNG: Eine explizite Differentialgleichung kann also nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst werden:

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}).$$

BEISPIELE: Die Beispiele 1 bis 4 zur Definition 1.1 sind explizit. Die Beispiele 1 und 2 sind nicht autonom, während die Beispiele 3 und 4 autonom sind.

Die Differentialgleichung

$$txx'' = 0$$

ist nicht explizit und nicht autonom. Man kann sofort unendlich viele Lösungen angeben, nämlich

$$x(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Aber sind das alle?

Die Frage nach der Lösbarkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen und mehr noch nach Methoden zum Auffinden einiger oder aller Lösungen sind zentrale Fragen dieser Vorlesung. Jedoch ist es in der Praxis nicht immer notwendig Lösungen einer Differentialgleichung konkret anzugeben, sondern es kann ebenso wichtig sein Eigenschaften von Lösungen zu kennen. Diese kann man häufig aus der Differentialgleichung selbst gewinnen ohne diese zu lösen. Die folgende Feststellung liefert ein nützliches Beispiel:

FESTSTELLUNG 1.3: *Ist die Funktion f in der expliziten Differentialgleichung (9) stetig, so ist jede Lösung der Differentialgleichung n -mal stetig differenzierbar.*

Ist der Definitionsbereich von f offen und f m -mal stetig differenzierbar, so ist jede Lösung $(n + m)$ -mal stetig differenzierbar.

Ist f unendlich oft differenzierbar, so gilt dies auch für jede Lösung.

BEWEIS: Ist $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung (9), so kann man ihre n -Ableitung $x^{(n)}$ als Verkettung der Abbildung

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, t \mapsto (t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T$$

und f schreiben: $x^{(n)} = f \circ g$. Die Abbildung g ist differenzierbar, denn ihre Koordinatenfunktionen sind differenzierbar, also stetig.

Ist f stetig, so ist also $x^{(n)}$ eine Verkettung stetiger Funktionen und damit stetig.

Ist f sogar (stetig) differenzierbar, so ist nach der Kettenregel auch $x^{(n)}$ differenzierbar; es gilt:

$$x^{(n+1)} = (x^{(n)})' = (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g',$$

wobei

$$f' = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

und daher

$$x^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial t} \circ g + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ g \right) x^{(k)}.$$

Ist f sogar stetig differenzierbar, so folgt aus der letzten Identität die Stetigkeit von $x^{(n+1)}$ also die $(n + 1)$ -malige stetige Differenzierbarkeit von x . Durch vollständige Induktion ergibt sich die allgemeine Aussage. \square

Die Beispiele haben gezeigt, dass es nützlich ist nach Lösungen einer Differentialgleichung zu suchen, die bestimmten Vorgaben an einer festen Stelle t_0 ihres Definitionsbereichs genügen. Dies motiviert die

DEFINITION 1.4: *Ein Anfangswertproblem (AWP) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung $F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$ zusammen mit Bedingungen der Form*

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, x''(t_0) = x''_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \quad (10)$$

für die gesuchten Lösungen $x : I \rightarrow \mathbb{R}$. Insbesondere muss also $t_0 \in I$ gelten.

BEMERKUNGEN:

1. Ist ein AWP gegeben, so wird durch die Differentialgleichung selbst auch eine Bedingung an $x^{(n)}(t_0)$ gestellt, denn es muss per Definition

$$F(x_0, x_0', x_0'', \dots, x_0^{(n-1)}, x^{(n)}(t_0)) = 0$$

gelten.

2. Ist $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung eines AWP, so gibt es insbesondere Lösungen der Form $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t_1 > t_0$, gibt. Interpretiert man die Variable t als Zeit, so liefert dies das Motiv für die Bezeichnung *Anfangswertproblem*.

Selbst wenn eine vorliegende gewöhnliche Differentialgleichung Lösungen besitzt, so muss nicht jedes AWP zu dieser Differentialgleichung auch eine Lösung besitzen. Man betrachte beispielsweise die Differentialgleichung

$$(x')^2 + |x| = 0.$$

Offensichtlich ist die Nullfunktion $x = 0$ die einzige Lösung dieser Differentialgleichung, womit das zugehörige AWP

$$x(1) = 1$$

keine Lösung besitzt.

2 Differentialgleichungen erster Ordnung

Die in der Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

auftretende Funktion F bestimmt offenbar den Schwierigkeitsgrad (die Komplexität) der Differentialgleichung. Insbesondere sind explizite Differentialgleichungen »einfacher« als nicht explizite. Es liegt daher nahe sich zunächst im Detail mit gewöhnlichen Differentialgleichungen der Gestalt

$$x' = f(t, x) \tag{11}$$

mit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, zu befassen, also den expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung. Streng betrachtet, muss die zweite Variable der Funktion f gemäß Definition 1.1 mit x_1 oder ähnlich bezeichnet werden. Im Folgenden wird jedoch die weit verbreitete, bequemere Konvention verwendet die Variable genauso wie die Lösungen mit x zu bezeichnen. Was jeweils gemeint ist, ergibt sich aus dem Kontext.

2.1 Das Richtungsfeld und das Polygonzugverfahren

Die Differentialgleichungen (11) und ihre Lösungen $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen eine ausgesprochen nützliche geometrische Interpretation: Es sei $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung (11). Dann schreibt letztere dem Graphen

$$\text{Graph}(x) := \{(t, x(t)) : t \in I\} \subset D$$

die Steigung $x'(t)$ der Tangenten in jedem Punkt $(t, x) \in D$ vor: sie muss nämlich den Wert $f(t, x)$ besitzen. Diese Betrachtungsweise motiviert die folgenden beiden Begriffe:

DEFINITION 2.1: *Ein Tripel $(t, x, f(t, x))$, $(t, x) \in D$, heißt Linienelement der Differentialgleichung (11).*

Die Menge $R := \{(t, x, f(t, x)) : (t, x) \in D\}$ aller Linienelemente nennt man das Richtungsfeld der Differentialgleichung (11).

Die Abbildung 3 zeigt eine Visualisierung des Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$x' = \sin(t)x$$

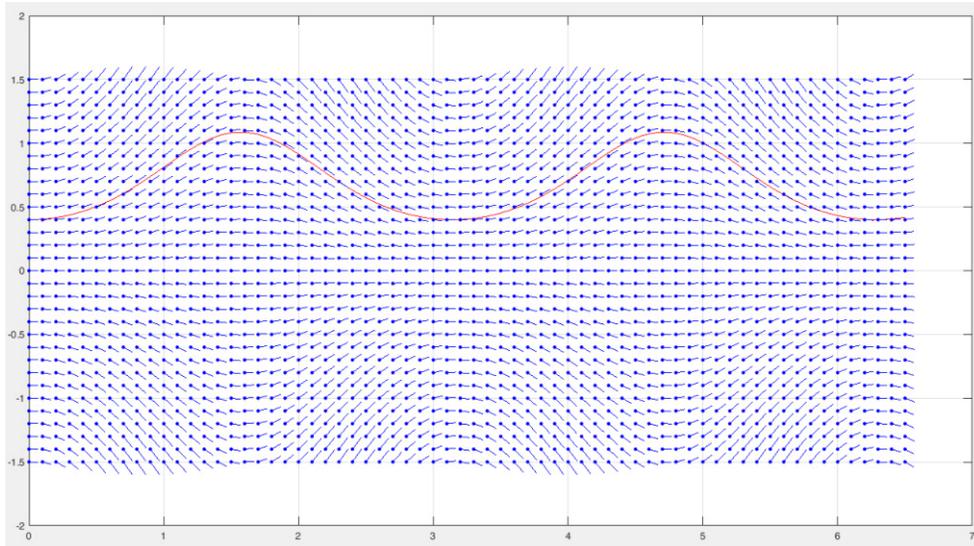


Abbildung 3: Richtungsfeld von $x' = \sin(t)x$

im Bereich $[0, 6.5] \times [-1.5, 1.5]$. Die in roter Farbe dargestellte Kurve, ist der Graph einer Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $x(0) = 0.4$. Ein Linienelement $(t, x, f(x, t))$ wird in dieser Visualisierung als Punkt mit den Koordinaten (t, x) dargestellt, an den ein kurzes Geradenstück mit der Steigung $f(t, x)$ angesetzt ist.

Das Richtungsfeld kann einerseits genutzt werden, um eine Vorstellung der Graphen von Lösungen zu gewinnen, und andererseits um Lösungen zu erraten. Es zeigt auch die Grundidee eines einfachen, numerischen Verfahrens zur näherungsweise Bestimmung von Lösungen auf, dem von Cauchy¹ und Euler² stammenden *Polygonzugverfahren*: Vorgelegt sei ein AWP

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit rechter Seite

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Wir nehmen an, dass (t_0, x_0) ein innerer Punkt von D ist. Dann existiert ein

¹Augustin Louis Cauchy, 1789 – 1857, französischer Mathematiker

²Leonhard Euler, 1707 – 1783, Schweizer Mathematiker

$a > 0$ derart, dass

$$[t_0, t_0 + a] \times [x_0 - a, x_0 + a] \subseteq D$$

gilt und es ist sinnvoll in diesem quadratischen Bereich nach einer *näherungsweise* Lösung $\tilde{x} : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ zu suchen. Hierzu zerlegt man das Intervall $[t_0, t_0 + a]$ in $n \in \mathbb{N}$ Teilintervalle der Länge $h := \frac{a}{n}$. Die Teilungspunkte sind dann durch

$$t_k = t_0 + kh, \quad k \in \{1, \dots, n-1\},$$

gegeben. Eine näherungsweise Lösung \tilde{x}_n des AWP wird rekursiv durch die folgende stückweise lineare Funktion definiert:

- $\tilde{x}_n(t) := x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$ für $t \in [t_0, t_1]$,
- $\tilde{x}_n(t) := \tilde{x}_n(t_1) + f(t_1, \tilde{x}_n(t_1))(t - t_1)$ für $t \in [t_1, t_2]$,
- $\tilde{x}_n(t) := \tilde{x}_n(t_2) + f(t_2, \tilde{x}_n(t_2))(t - t_2)$ für $t \in [t_2, t_3]$,
- usw.

Die Rekursion wird solange fortgesetzt, wie $(t_k, \tilde{x}_n(t_k)) \in D$ gilt. Die ermittelte Funktion \tilde{x}_n ist also möglicherweise nur in einem Intervall $[t_0, t_0 + b]$, $b < a$, definiert. Sie ist in den Punkten t_k in der Regel nicht differenzierbar! Ihre rechtsseitige Ableitung in diesen Punkten stimmt aber mit der Vorgabe durch die Differentialgleichung überein.

In Abbildung 4 sind zwei Näherungslösungen nach dem Polygonzugverfahren für das AWP

$$x' = -tx, \quad x(0) = 1,$$

dargestellt. Der Polygonzug in roter Farbe stellt die Näherungslösung zur Schrittweite $h = 0.4$, der in cyanblau die Näherungslösung zur Schrittweite $h = 0.2$ dar. Wir werden später sehen, dass das AWP die eindeutige Lösung

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

besitzt, die als Kurve in schwarzer Farbe zu sehen ist.

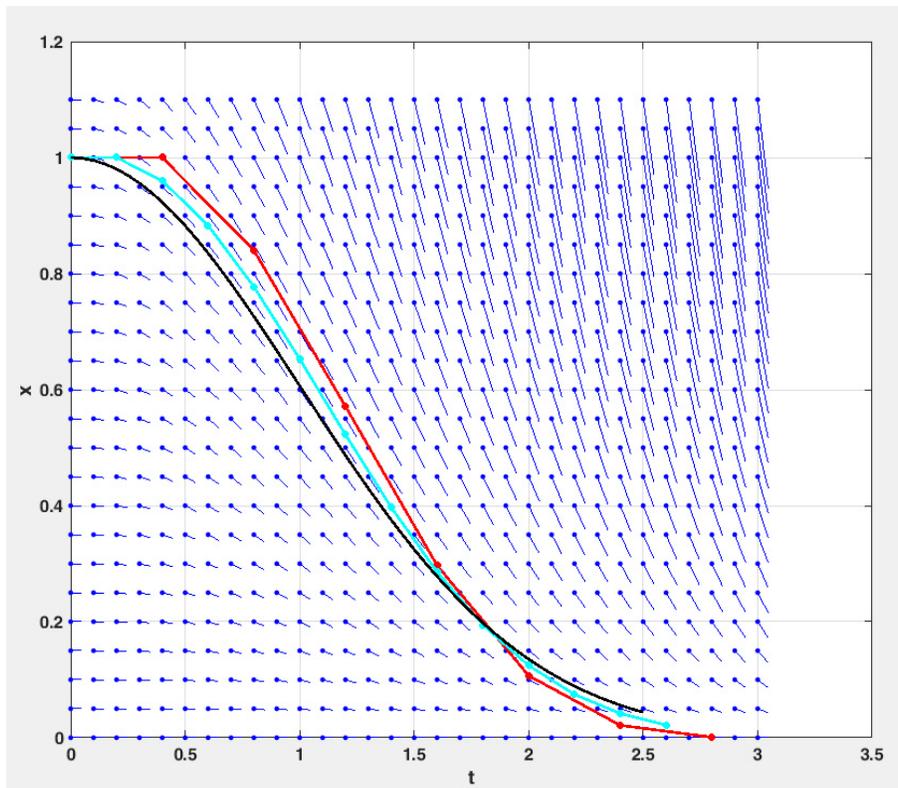


Abbildung 4: Näherungslösungen nach dem Polygonzugverfahren

Man schenke der Tatsache besondere Beachtung, dass das Verfahren auch anwendbar ist, wenn das vorliegende AWP keine eindeutige Lösung besitzt. Man wird also im Allgemeinen nicht erwarten können, dass die Folge $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise oder vielleicht sogar gleichmäßig gegen eine Lösung x des AWP konvergiert. Tatsächlich gilt der folgende Satz von Peano³, der hier aber nicht bewiesen werden soll:

³Giuseppe Peano, 1858 – 1932, italienischer Mathematiker

THEOREM 2.2: *Die rechte Seite f der Differentialgleichung (11) sei stetig und auf dem Rechteck*

$$Q := [t_0, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subseteq D$$

gelte

$$\forall t \in Q \quad |f(t, x)| \leq \frac{b}{a}.$$

Dann besitzt die Folge $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Polygonzüge eine Teilfolge, die gleichmäßig gegen eine Lösung des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ konvergiert.

BEMERKUNGEN:

1. Man beachte, dass das Rechteck Q kompakt ist, eine stetige Funktion f auf Q also stets beschränkt ist. Wesentlich an der Beschränktheitsforderung an f ist also die Größe der Schranke.
2. Man beachte auch, dass der Satz die Lösbarkeit vieler AWP's $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ liefert.
3. Besitzt das AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ eine eindeutige Lösung und liegen die Voraussetzungen des Satzes vor, so konvergiert die Folge $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Lösung.

Der Beweis des Satzes ist anspruchsvoll. Wir werden später einen Existenzsatz für Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen beweisen, der zwar höhere Anforderungen an f stellt, aber einen vergleichsweise einfachen Beweis besitzt. Ein Beweis von Theorem 2.2 findet sich in [HNW].

2.2 Elementare analytische Lösungsmethoden

Es bietet sich an die Klasse der Differentialgleichungen (11) unter Verwendung folgender Kriterien weiter zu untergliedern:

- Vorkommen der Variablen t und x in f ,
- Abbildungseigenschaften der Funktion f .

In den folgenden Abschnitten werden diese Klassifikationskriterien genutzt.

Eine sehr häufig vorliegende Eigenschaft ist die Stetigkeit der rechten Seite f . Diese hat zur Folge, dass das Richtungsfeld der Differentialgleichung keine sprunghaften Änderungen aufweist. Weiter sind Lösungen $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung dann sogar stetig differenzierbar, wie in Feststellung 1.3 bereits gezeigt wurde.

DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN $x'(t) = f(t)$

- Da Lösungen per Definition ein Intervall als Definitionsbereich besitzen und die rechte Seite der Differentialgleichung nicht von x abhängt, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Definitionsbereich von f die Form $D = I \times \mathbb{R}$ mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ besitzt.
- Da f nicht von x abhängt, kann man eine Funktion einer Variablen durch die Vorschrift

$$I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t, x)$$

mit beliebigem $x \in \mathbb{R}$ definieren. Der Einfachheit halber wird diese Funktion ebenfalls mit f bezeichnet.

- Nimmt man an, dass f stetig ist, so sind die Lösungen der Differentialgleichung nach Definition gerade die Stammfunktionen von f .

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert also:

SATZ 2.3: *Die Lösungen der Differentialgleichung $x' = f(t)$ mit stetiger rechter Seite $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sind durch*

$$x(t) := \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + x_0, \quad t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}$$

gegeben. Insbesondere sind alle Lösungen auf dem Intervall I definiert und jedes AWP $x' = f(t)$, $x(t_0) = x_0$ besitzt eine eindeutige Lösung.

BEISPIEL 2.4: Das AWP

$$x' = \sin(t), \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

besitzt die Lösung

$$x(t) = \int_{\frac{\pi}{4}}^t \sin(\tau) d\tau + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(t) + 1 = -\cos(t) + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

◇

DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN $x' = f(x)$

Die hier betrachteten Differentialgleichungen sind genau die expliziten, autonomen Differentialgleichungen erster Ordnung. Ihre Lösungen lassen sich in vielen Fällen mit Hilfe des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit ermitteln, der in der Analysis-Vorlesung behandelt wird:

SATZ 2.5: *Es sei $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $t_0 \in I$ sei ein innerer Punkt von I mit der Eigenschaft $g'(t_0) \neq 0$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I_1 \subseteq I$ mit den Eigenschaften:*

- $t_0 \in I_1$ und $J_1 := g(I_1)$ ist offen.
- $g|_{I_1} : I_1 \rightarrow J_1$ ist bijektiv.
- Die Umkehrfunktion $h : J_1 \rightarrow I_1$ ist stetig differenzierbar und für ihre Ableitung gilt:

$$\forall t \in I_1 \quad h'(g(t)) = \frac{1}{g'(t)}.$$

Inbesondere ist die Funktion $g|_{I_1}$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

Nach diesem Vorwort kehren wir zur Differentialgleichung $x' = f(x)$ zurück und betrachten die Funktion f zunächst wieder als eine ebenfalls mit f bezeichnete Funktion

$$f : J \rightarrow \mathbb{R}, \quad J \subseteq \mathbb{R}$$

einer Variablen und setzen voraus, dass f stetig ist. Dann ist jede Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $t_0 \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls I mit der Eigenschaft $x'(t_0) \neq 0$. Dann existiert nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit ein offenes Intervall $I_1 \subseteq I$, $t_0 \in I_1$, derart, dass die Einschränkung

$$x_1 := x|_{I_1} : I_1 \rightarrow J_1 := x(I_1)$$

bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion besitzt. Hierbei ist $J_1 \subseteq J$ notwendigerweise ein offenes Intervall.

Es sei

$$t_1 : J_1 \rightarrow I_1, \xi \mapsto t_1(\xi),$$

die Umkehrfunktion von x_1 . Für deren Ableitung gilt dann:

$$t_1'(\xi) = \frac{1}{x_1'(t_1(\xi))} = \frac{1}{f(x(t_1(\xi)))} = \frac{1}{f(\xi)},$$

das heißt die Funktion t_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$t'(\xi) = \frac{1}{f(\xi)}, \tag{12}$$

deren Lösungsverhalten durch Satz 2.3 beschrieben wird:

$$t_1(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{f(\zeta)} d\zeta + t_0, \quad x_0 := x(t_0). \tag{13}$$

Mit Hilfe der bisherigen Überlegungen lässt sich nun zeigen:

SATZ 2.6: *Es seien $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \subseteq \mathbb{R}$, eine stetige Funktion und x_0 ein innerer Punkt von J mit $f(x_0) \neq 0$. Dann besitzt das AWP*

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0$$

für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit offenem Definitionsbereich I auf dem x die einzige Lösung des AWP ist.

BEWEIS: Wegen der Stetigkeit von f gibt es ein offenes Intervall $J_1 \subseteq J$ mit den Eigenschaften $x_0 \in J_1$ und

$$\forall x \in J_1 \quad f(x) \neq 0.$$

Es sei dann $t_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung (13) der Differentialgleichung (12). Für diese gilt

$$\forall x \in J_1 \quad t_1'(x) \neq 0.$$

Nach Satz 2.5 besitzt t_1 daher eine differenzierbare Umkehrfunktion $x_1 : I_1 \rightarrow J_1$ mit dem offenen Intervall $I_1 := t_1(J_1)$. Für die Ableitung von x_1 gilt

$$x_1'(t) = \frac{1}{t_1'(x_1(t))} = \frac{1}{\frac{1}{f(x_1(t))}} = f(x_1(t)),$$

das heißt die Funktion x_1 ist eine Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$. Weiter gilt nach Konstruktion $t_1(x_0) = t_0$ also $x_1(t_0) = x_0$.

Es bleibt die letzte Aussage des Satzes zu zeigen: ... (noch zu ergänzen). □

BEISPIEL 2.7: Wir wollen *alle* Lösungen der Differentialgleichung

$$x' = x$$

bestimmen.

Aus der Analysisvorlesung sind die Lösungen bereits bekannt: Es sind die Funktionen $x(t) = Ce^t$, $C \in \mathbb{R}$. Will man also ein AWP $x' = x$, $x(t_0) = x_0$ lösen, so muss $Ce^{t_0} = x_0$ gelten, woraus sich die eindeutige Lösung

$$x(t) = x_0 e^{t-t_0}$$

mit dem Definitionsbereich $I = \mathbb{R}$ ergibt.

Wir wollen überprüfen, ob das Vorgehen, das zu Satz 2.6 geführt hat, ebenfalls diese Lösungen liefert. Hierzu muss man allerdings $x_0 \neq 0$ annehmen. Da $J = \mathbb{R}$ gilt, ist x_0 dann stets ein innerer Punkt. Die Differentialgleichung (12) besitzt im vorliegenden Fall die Form

$$t'(\xi) = \frac{1}{\xi}$$

mit der Lösung

$$t_1(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{\zeta} d\zeta + t_0.$$

Ist $x_0 > 0$, so besitzt t_1 den Definitionsbereich $J_1 = (0, \infty)$ und es gilt

$$t_1(\xi) = \ln(\xi) - \ln(x_0) + t_0.$$

Es gilt $I_1 = t_1(J_1) = \mathbb{R}$. Die gesuchte Lösung x_1 ist die Umkehrfunktion von t_1 . Durch Auflösen der obigen Gleichung nach ξ erhält man

$$\xi = x_0 e^{t_1 - t_0},$$

also die Umkehrfunktion $x_1(t) = x_0 e^{t - t_0}$ mit dem Definitionsbereich I_1 .

Ist andererseits $x_0 < 0$, so erhält man $J_1 = (-\infty, 0)$ als Definitionsbereich von t_1 und daher

$$t_1(\xi) = \ln(-\xi) - \ln(-x_0) + t_0.$$

Es ergibt sich $I_1 = t_1(J_1) = \mathbb{R}$ und ebenfalls $x_1(t) = x_0 e^{t - t_0}$.

Den Fall $x_0 = 0$ kann man nicht direkt mit dem Satz 2.6. Folgende Überlegung zeigt aber, dass $x = 0$ dann die einzige Lösung ist: Nimmt man an, dass $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine von 0 verschiedene Lösung mit $x(t_0) = 0$ ist, so gibt es ein $t_1 \in I$ mit $x(t_1) =: x_1 \neq 0$. Nach dem bereits Bewiesenen besitzt das AWP

$$x' = x, \quad x(t_1) = x_1$$

genau eine Lösung, nämlich $\bar{x}(t) = x_1 e^{t - t_1}$ mit dem Definitionsbereich \mathbb{R} . Also stimmen x und \bar{x} in einer Umgebung von 0 überein, woraus sich der Widerspruch

$$0 = x(0) = \bar{x}(0) = x_1 e^{-t_1}$$

ergibt. ◇

Die Überlegungen, die zu Satz 2.6 geführt haben, helfen auch ein Verfahren anzugeben, das häufig explizit die Lösung eines AWP, wie im Satz angegeben, liefert.

VERFAHREN 2.8 (LÖSEN VON $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$):

1. Man bestimme ein Intervall J_1 mit $x_0 \in J_1$, in dem f keine Nullstelle besitzt.
2. Man bestimme eine Formel für die Abbildungsvorschrift der Funktion

$$t_1(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{f(\zeta)} d\zeta + t_0.$$

Dies ist allerdings nicht immer möglich oder kann zu komplexen Formeln führen.

Man beachte *unbedingt*: Die obige Gleichung gilt nur in einem Intervall J_1 mit $x_0 \in J_1$, in dem f keine Nullstelle besitzt.

3. Man bestimme $I_1 := t_1(J_1)$.
4. Man bestimme durch Auflösen nach ξ der im Schritt 2 gewonnenen Formel für t_1 eine explizite Gleichung für die Umkehrfunktion $x_1 = t_1^{-1}$.
Dies ist allerdings nicht immer möglich oder kann zu komplexen Formeln führen.

Dann ist $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine explizit gegebenen Lösung des vorliegenden AWP.

BEISPIEL 2.9: Es soll das AWP

$$x' = x \ln(x), \quad x(0) = x_0 \neq 1$$

gelöst werden.

Die rechte Seite ist auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$ definiert und stetig. Mit den Bezeichnungen von Satz 2.6 ist also $J = \mathbb{R}^{>0}$ und x_0 damit ein innerer Punkt von J . Die rechte Seite besitzt die einzige Nullstelle $x = 1$. Da $x_0 \neq 1$ vorausgesetzt wird, ist das Verfahren 2.8 anwendbar.

Schritt 1:

Fall $x_0 > 1$: $J_1 = (1, \infty)$.

Fall $x_0 < 1$: $J_1 = (0, 1)$.

Schritt 2:

Fall $x_0 > 1$: Es ist dann auch $\xi > 1$ und daher gilt

$$\begin{aligned} t_1(\xi) &= \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{\zeta \ln \zeta} d\zeta + t_0 \\ &= \ln(\ln(\zeta)) \Big|_{x_0}^{\xi} + 0 \\ &= \ln(\ln(\xi)) - \ln(\ln(x_0)). \end{aligned}$$

Fall $x_0 < 1$: Es ist dann auch $\xi < 1$ und daher gilt nach der Substituti-

onsregel:

$$\begin{aligned}
 t_1(\xi) &= \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{\zeta \ln \zeta} d\zeta + 0 \\
 &= \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{\frac{1}{\zeta} \ln(\frac{1}{\zeta})} \cdot -\frac{1}{\zeta^2} d\zeta \\
 &= \int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{\xi}} \frac{1}{\lambda \ln(\lambda)} d\lambda \\
 &= \ln(-\ln(\xi)) - \ln(-\ln(x_0)).
 \end{aligned}$$

Schritt 3:

Fall $x_0 > 1$: $t_1(J_1) = t_1((1, \infty)) = \mathbb{R}$.

Fall $x_0 < 1$: $t_1(J_1) = t_1((0, 1)) = \mathbb{R}$.

Schritt 4:

Fall $x_0 > 1$: Auflösen nach ξ liefert

$$\xi = e^{(e^{\bar{t}(\xi)} + \ln(\ln(x_0)))},$$

also

$$x_1(t) = e^{(e^{t+\ln(\ln(x_0))})}.$$

Fall $x_0 < 1$: Auflösen nach ξ liefert

$$\xi = e^{-(e^{\bar{t}(\xi)} + \ln(-\ln(x_0)))},$$

also

$$x_1(t) = e^{-(e^{t+\ln(-\ln(x_0))})}.$$

Die Abbildung 5 zeigt das Richtungsfeld der hier diskutierten Differentialgleichung, sowie die Graphen von Lösungen zu folgenden Werten von x_0 : 0.7 (grün), 0.9 (braun), 1.1 (rot) und 1.2 (magenta). \diamond

Neben der Frage nach der Existenz von Lösungen einer Differentialgleichung bzw. eines AWP stellt sich auch die nach deren Eindeutigkeit, wie das im Satz 2.6 bereits anklingt. Das folgende Beispiel demonstriert, welche Phänomene in diesem Zusammenhang auftreten können.

BEISPIEL 2.10: Im Folgenden soll das Lösungsverhalten der AWP

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(t_0) = x_0 \tag{14}$$

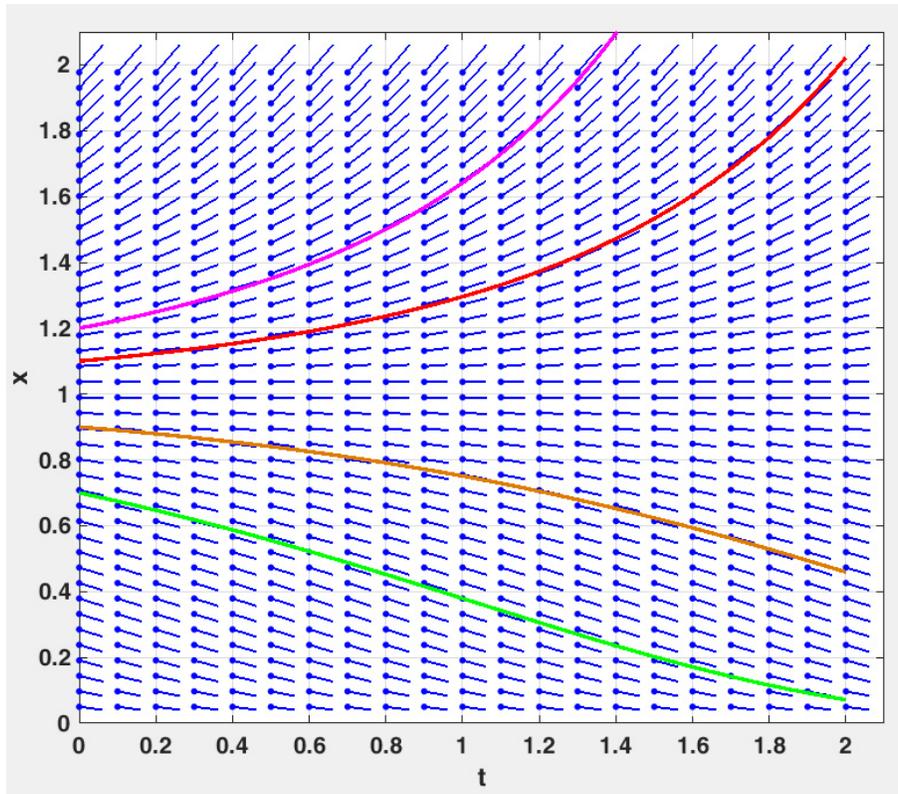


Abbildung 5: Richtungsfeld und Lösungen von $x' = x \ln(x)$

untersucht werden. Die rechte Seite $f(x) = \sqrt{|x|}$ ist stetig, besitzt den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^2$ und $x = 0$ als einzige Nullstelle. Satz 2.6 und das Verfahren 2.8 sind also nur anwendbar, falls $x_0 \neq 0$ gilt.

Es sei zunächst $x_0 > 0$. Dann ist $J_1 = (0, \infty)$ und auf diesem Intervall gilt

$$t_1(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} d\zeta + t_0 = 2(\sqrt{\xi} - \sqrt{x_0}) + t_0.$$

Es folgt $I_1 = t_1(J_1) = (t_0 - 2\sqrt{x_0}, \infty)$ und für die Umkehrfunktion von t_1 erhält man die auf diesem Intervall nach Satz 2.6 eindeutige Lösung

$$x_1(t) = \left(\frac{1}{2}(t - t_0) + \sqrt{x_0}\right)^2. \quad (15)$$

Es sei nun $x_0 < 0$. Es ist dann $J_1 = (-\infty, 0)$ und auf diesem Intervall gilt

$$t_1(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{-\zeta}} d\zeta + t_0 = 2(-\sqrt{-\xi} + \sqrt{-x_0}) + t_0. \quad (16)$$

Hieraus erhält man $I_1 = t_1(J_1) = (-\infty, t_0 + 2\sqrt{-x_0})$ und die dort eindeutige Lösung

$$x_1(t) = -\left(\frac{1}{2}(t - t_0) - \sqrt{-x_0}\right)^2. \quad (17)$$

Im bislang nicht behandelten Fall $x_0 = 0$ ist die Nullfunktion $x = 0$ eine Lösung.

Haben wir damit jeweils alle Lösungen des AWP (14) gefunden? Die Antwort lautet »Nein«, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

Es sei $x_0 < 0$ gegeben. Für die zugehörige Lösung (17) gilt dann:

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + 2\sqrt{-x_0}} x_1'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 2\sqrt{-x_0}} \sqrt{|x_1(t)|} = 0.$$

Folglich gilt: Setzt man x_1 rechts des Wertes $t_1 := t_0 + 2\sqrt{-x_0}$ bis zu einem Wert $t_2 > t_1$ als Nullfunktion $x_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 0$ fort, so ist die entstehende Funktion im Intervall $(-\infty, t_2]$ differenzierbar und eine Lösung des AWP (14). Dabei ist $t_2 = \infty$ zulässig. Im Fall $t_2 \neq \infty$ kann man weiter Folgendes tun: Man wählt $t_3 > t_2$ und $x_3 > 0$ so, dass

$$t_3 - 2\sqrt{x_3} = t_2$$

gilt. Sei dann x_3 die Lösung (15) zu dem AWP $x(t_3) = x_3$. Für diese gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_2} x_3'(t) = 0.$$

Folglich ist die Funktion

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} x_1(t) & \text{falls } t \in (-\infty, t_1) \\ x_2(t) & \text{falls } t \in [t_1, t_2] \\ x_3(t) & \text{falls } t \in (t_2, \infty) \end{cases}$$

eine Lösung des AWP $x(t_0) = x_0$. Eine solche ist in Abbildung 6 dargestellt. Da man t_2 frei wählen kann, gibt es unendlich viele verschiedene Lösungen

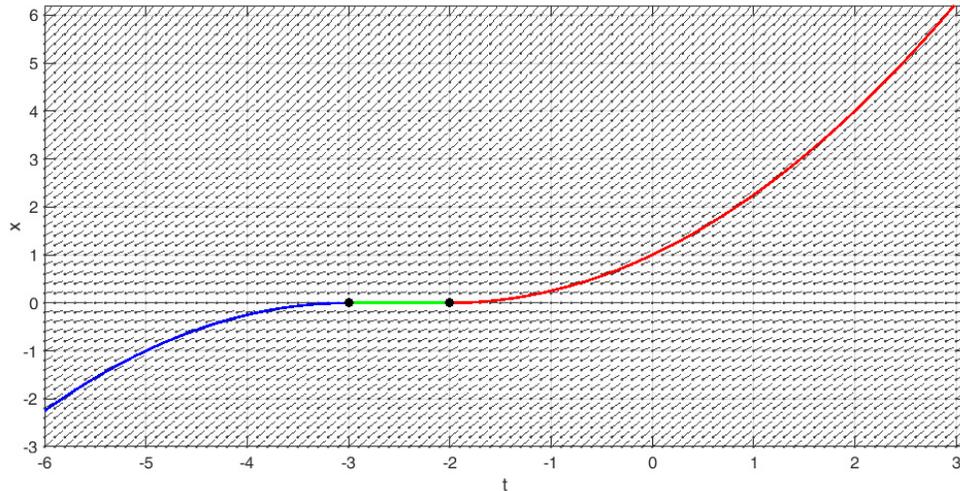


Abbildung 6: Richtungsfeld und zusammengesetzte Lösung von $x' = \sqrt{|x|}$

des AWP (14). (Es ist klar, dass man die gleiche Argumentation auch im Fall $x_0 > 0$ durchführen kann.)

Es stellt sich die Frage, ob wir nun wirklich alle Lösungen gefunden haben: Sei $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = \sqrt{|x|}$, die nicht konstant 0 ist. Die Differentialgleichung selbst liefert dann $x'(t) \geq 0$ für alle $t \in I$, das heißt x ist monoton wachsend. Da x stetig ist, ist die Menge N ihrer Nullstellen abgeschlossen in I und damit wegen der Monotonie ein abgeschlossenes Intervall, möglicherweise leer. Insgesamt besitzt I also die Gestalt

$$I = I_1 \cup N \cup I_2,$$

wobei die Vereinigung disjunkt und mindestens eines der beiden Intervalle I_1 und I_2 nicht leer ist.

Ist $I_1 \neq \emptyset$, so gilt dort $x(t) < 0$ also $x'(t) > 0$. Folglich ist $x_1 := x|_{I_1}$ streng monoton wachsend und besitzt eine Umkehrfunktion $t_1 : J_1 \rightarrow I_1$. Ist $t_0 \in I_1$ und $x_0 := x(t_0)$, so löst x_1 das AWP $x' = \sqrt{-x}$, $x(t_0) = x_0$, weshalb t_1 die Gestalt (16) besitzt. Folglich hat x_1 die Form (17), wie angestrebt.

Diesselbe Argumentation kann mit I_2 durchgeführt werden. Insgesamt zeigt sich, dass tatsächlich alle Lösungen der Differentialgleichung gefunden wurden. \diamond

DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN $x' = g(t)h(x)$

Differentialgleichungen dieser Form bezeichnet man als Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Man beachte, dass jeder der bislang behandelten Fälle von diesem Typ ist.

Um Systematisches über ihre Lösungen sagen zu können, macht man die Annahmen: Es seien $g : I_g \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : J_h \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf den Intervallen I_g und J_h . Die rechte Seite $f(t, x) = g(t)h(x)$ besitzt dann den Definitionsbereich $I_g \times J_h$ und ist stetig.

Für jede Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ muss $I \subseteq I_g$ und $x(I) \subseteq J_h$ gelten.

Um an die Lösungen von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen heranzukommen, startet man wie im vorigen Fall mit einigen Vorüberlegungen: Es sei $x_0 \in J_h$ ein innerer Punkt mit $h(x_0) \neq 0$; ein solcher existiert stets, falls h nicht die Nullfunktion ist. Es sei $x : I \rightarrow J_h$ eine Lösung des AWP

$$x'(t) = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Da $h \circ x$ stetig ist, gibt es ein Intervall $I_1 \subseteq I$, $t_0 \in I_1$, derart, dass $h \circ x$ in I_1 keine Nullstellen besitzt. In diesem Intervall gilt die Gleichung

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t),$$

folglich auch

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(\tau)}{h(x(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Nach der Substitutionsregel ist

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(\tau)}{h(x(\tau))} d\tau = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{h(\zeta)} d\zeta. \quad (19)$$

Die auf dem Intervall $J_1 := x(I_1)$ definierte Funktion

$$H(\xi) := \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{h(\zeta)} d\zeta$$

ist injektiv: Entweder besteht J_1 nur aus einem Punkt, dann ist die Injektivität klar, oder $x(I_1)$ ist ein aus mehr als einem Punkt bestehendes Intervall,

dann ist H differenzierbar mit $H' = \frac{1}{h}$. Da H' keine Nullstellen besitzt, ist H streng monoton, woraus die Injektivität folgt.

Es sei $H^{-1} : J_1 \rightarrow I_1$ die Umkehrfunktion von H und $G(t) := \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$.

Dann kann man die Gleichungen (18) und (19) als

$$H \circ x = G$$

schreiben. Es folgt

$$x = H^{-1} \circ G,$$

womit eine Formel abgeleitet wurde, die man zur Bestimmung einer Lösung verwenden kann: G ist eine Stammfunktion von g und H^{-1} kann möglicherweise durch Auflösen einer expliziten Gleichung für H ermittelt werden.

SATZ 2.11: *Es seien $g : I_g \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : J_h \rightarrow \mathbb{R}$ stetige, auf Intervallen definierte Funktionen. Zu jedem $t_0 \in I_g$ und jedem inneren Punkt $x_0 \in J_h$ mit der Eigenschaft $h(x_0) \neq 0$ besitzt das AWP*

$$x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0$$

dann eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem offenen Intervall I auf dem x auch die einzige Lösung ist.

BEWEIS: Motiviert durch die Vorüberlegungen wählt man ein offenes Intervall $J_1 \subset J_h$ mit den Eigenschaften: $x_0 \in J_1$ und h besitzt keine Nullstellen in J_1 . Wie oben ausgeführt ist die Funktion

$$H : J_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{h(\zeta)} d\zeta$$

dann injektiv, stetig differenzierbar und besitzt daher nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit eine differenzierbare Umkehrfunktion $H^{-1} : I_1 \rightarrow J_1$, wobei $I_1 := H(J_1)$ ein offenes Intervall mit der Eigenschaft $0 = H^{-1}(x_0) \in I_1$ ist.

Die Funktion

$$G : I_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$$

ist stetig differenzierbar, insbesondere also stetig. Es gilt $G(t_0) = 0 \in I_1$. Daher gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $t_0 \in I$ und $G(I) \subseteq I_1$.

Es sei nun

$$x := H^{-1} \circ G : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann ist x eine Lösung des im Satz angegebenen AWP: Für jedes $t \in I$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} x'(t) &= (H^{-1} \circ G)'(t) \\ &= (H^{-1})'(G(t))G'(t) \\ &= (H^{-1})'(H(x(t)))G'(t) \\ &= \frac{1}{H'(x(t))}g(t) \\ &= \frac{1}{h(x(t))}g(t) \\ &= g(t)h(x(t)). \end{aligned}$$

Weiter ist $x(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0$.

Die Eindeutigkeit der Lösung auf dem Intervall I folgt aus den Vorüberlegungen, die zeigen, dass x auf I der Formel $x = H^{-1} \circ G$ genügen muss. \square

VERFAHREN 2.12 (LÖSEN VON $x' = g(t)h(x)$, $x(t_0) = x_0$):

1. Man ermittle ein (möglichst großes) Intervall J_1 , $x_0 \in J_1$, in dem h keine Nullstelle besitzt.
2. Man bestimme eine explizite Funktionsgleichung für die Funktion

$$H(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{h(\zeta)} d\zeta$$

auf dem Intervall J_1 .

3. Man bestimme $I_1 = H(J_1)$.
4. Man bestimme eine explizite Funktionsgleichung für die Funktion

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau$$

und wähle ein möglichst großes (offenes) Intervall I mit $t_0 \in I$ und $G(I) \subseteq I_1$.

5. Man löse die Gleichung

$$H(\xi) = G(t)$$

explizit nach ξ auf, wobei man die in den Schritten 2 und 4 ermittelten Funktionsgleichungen für G und H benutzt, und erhält so eine Lösung

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto H^{-1}(G(t)).$$

BEISPIEL 2.13: Es soll ein AWP der Form

$$x' = \cos(t)x^2, x(t_0) = x_0$$

gelöst werden, es ist also $g(t) = \cos(t)$ und $h(x) = x^2$. Um das gerade beschriebene Verfahren anwenden zu können, muss man folglich $x_0 \neq 0$ voraussetzen.

Schritt 1:

Fall $x_0 > 0$: $J_1 = (0, \infty)$.

Fall $x_0 < 0$: $J_1 = (-\infty, 0)$.

Schritt 2: In beiden Fällen erhält man

$$H(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{\zeta^2} d\zeta = -\frac{1}{\xi} + \frac{1}{x_0}.$$

Schritt 3:

Fall $x_0 > 0$: $I_1 = (-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Fall $x_0 < 0$: $I_1 = (\frac{1}{x_0}, \infty)$.

Schritt 4:

$$G(t) = \int_{t_0}^t \cos(\tau) d\tau = \sin(t) - \sin(t_0),$$

die Funktion G ist also periodisch mit Periode 2π und es gilt $G(\mathbb{R}) = [-1 - \sin(t_0), 1 - \sin(t_0)]$.

Das Definitionsintervall I der gesuchten Lösung x hängt nun stark von den Werten von t_0 und x_0 ab. Anstelle einer systematischen Diskussion der möglichen Fälle seien hier nur exemplarisch einige dieser Fälle angegeben: Es sei stets $t_0 = 0$.

- $x_0 = -\frac{1}{2}$: Es ist $G(\mathbb{R}) = [-1, 1] \subset I_1 = (-2, \infty)$, folglich kann man $I = \mathbb{R}$ wählen. Der Graph der Lösung des entsprechenden AWP ist in Abbildung 7 in roter Farbe dargestellt.
- $x_0 = -2$: Es ist $I_1 = (-\frac{1}{2}, \infty)$. Folglich ist $I := (-\frac{\pi}{6}, \pi + \frac{\pi}{6})$ das größte offene Intervall mit $t_0 = 0 \in I$ und $G(I) = \sin(I) \subseteq I_1$. Der Lösungsgraph ist in Abbildung 7 in hellgrüner Farbe dargestellt.
- $x_0 = \frac{3}{4}$: Es ist $I_1 = (-\infty, \frac{4}{3})$, weswegen $G(\mathbb{R}) \subseteq I_1$ ist und daher $I = \mathbb{R}$ gewählt werden kann. Der Graph der Lösung erscheint in Abbildung 7 in dunkelgrüner Farbe.
- $x_0 = 1$: Es ist $I_1 = (-\infty, 1)$. Daher ist $I = (-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2})$ das größte offene Intervall mit $t_0 = 0 \in I$ und $G(I) = \sin(I) \subseteq I_1$. Der Graph der Lösung erscheint in Abbildung 7 in brauner Farbe.

Schritt 5: Aus

$$-\frac{1}{\xi} + \frac{1}{x_0} = \sin(t) - \sin(t_0)$$

ergibt sich die Funktionsgleichung

$$x(t) = \frac{1}{\sin(t_0) + \frac{1}{x_0} - \sin(t)}$$

für die Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$. Insbesondere zeigt sich, dass alle Lösungen eines AWP mit $I = \mathbb{R}$ periodisch mit der Periode 2π sind.

Das Beispiel illustriert wie stark das Verhalten von Lösungen einer Differentialgleichung von den Anfangsbedingungen abhängen kann. \diamond

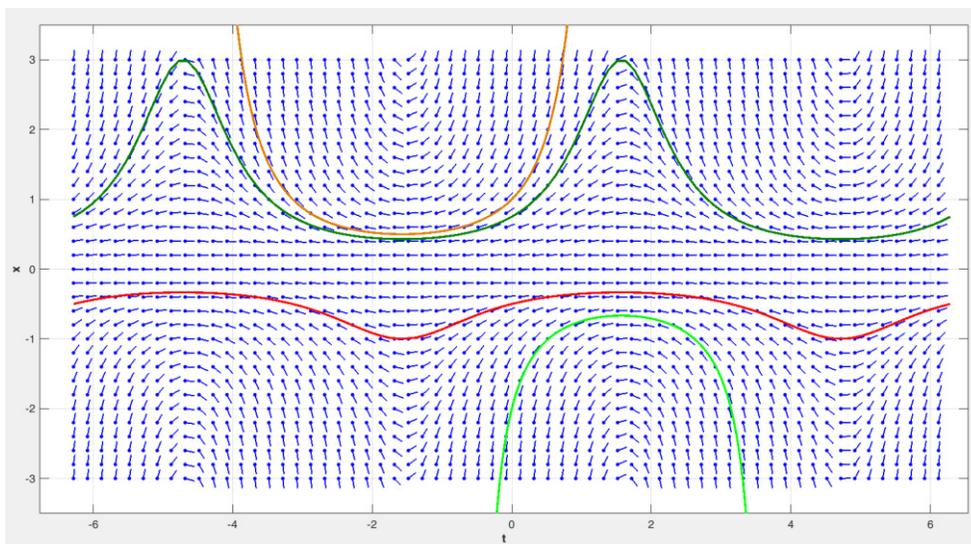


Abbildung 7: Lösungen von $x' = \cos(t)x^2$

2.3 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

In diesem Abschnitt wird eine Klasse expliziter Differentialgleichungen diskutiert, für deren Lösung man die lineare Algebra gewinnbringend einsetzen kann: Mit ihrer Hilfe lässt sich die Menge aller Lösungen vollständig beschreiben.

DEFINITION 2.14: *Eine explizite, lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Differentialgleichung der Gestalt*

$$x' = a(t)x + b(t), \quad (20)$$

wobei $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktionen sind.

Falls beide Funktionen a und b konstant sind, bezeichnet man (20) als lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Falls b die Nullfunktion ist, bezeichnet man (20) als homogene ansonsten als inhomogene lineare Differentialgleichung.

Wir untersuchen zunächst die Stetigkeit der rechten Seite: Die Funktion $f(t, x) := a(t)x + b(t)$ besitzt den Definitionsbereich $I \times \mathbb{R}$. Sind a und b

stetig, so gilt dies auch für f : Eine Folge $(t_k, x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^2 versehen mit der euklidischen Norm ist bekanntlich konvergent, genau dann wenn die Folgen $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent sind. Für eine konvergente Folge $(t_k, x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $I \times \mathbb{R}$ mit Grenzwert (t_0, x_0) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k, x_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} a(t_k)x_k + b(t_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} a(t_k) \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \lim_{k \rightarrow \infty} b(t_k) \\ &= a\left(\lim_{k \rightarrow \infty} t_k\right) \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + b\left(\lim_{k \rightarrow \infty} t_k\right) \\ &= a(t_0)x_0 + b(t_0). \end{aligned}$$

Ist andererseits f stetig und $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in I mit Grenzwert $t_0 \in I$, so ist $(t_k, 0)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent in $I \times \mathbb{R}$ und es folgt

$$b(t_0) = f(t_0, 0) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, 0)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k, 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} b(t_k),$$

womit b stetig ist. Analog beweist man die Stetigkeit der Funktion $a + b$ unter Benutzung einer konvergenten Folge der Form $(t_k, 1)_{k \in \mathbb{N}}$. Es folgt die Stetigkeit von $a = a + b - b$. Es wurde gezeigt:

FESTSTELLUNG 2.15: *Die aus zwei Funktionen $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ gebildete Funktion $f(t, x) := a(t)x + b(t)$ ist genau dann stetig, wenn a und b stetig sind.*

Nun wird die lineare Algebra ins Spiel gebracht. Hierzu sei zunächst an den Begriff der linearen Abbildung erinnert:

LA.1 Sind V und W zwei reelle Vektorräume, so nennt man eine Abbildung $L : V \rightarrow W$ linear, falls sie die beiden Eigenschaften

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in V \quad L(\lambda x) &= \lambda L(x), \\ \forall x_1, x_2 \in V \quad L(x_1 + x_2) &= L(x_1) + L(x_2) \end{aligned}$$

besitzt.

LA.2 Als Kern einer linearen Abbildung L wird die Menge

$$\text{Kern}(L) := \{v \in V : L(v) = 0\}$$

bezeichnet; sie ist ein Untervektorraum von V .

LA.3 Als Bild einer linearen Abbildung L wird die Menge

$$L(V) := \{L(v) : v \in V\}$$

bezeichnet; sie ist ein Untervektorraum von W .

LA.4 Die Gleichung $L(x) = b$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $b \in L(V)$ gilt.

LA.5 Ist $x_0 \in V$ eine Lösung der Gleichung $L(x) = b$, so ist ihre gesamte Lösungsmenge \mathbb{L} durch

$$\mathbb{L} = \{x_0 + v : v \in \text{Kern}(L)\} = x_0 + \text{Kern}(L)$$

gegeben.

LA.6 Sind $L_1 : U \rightarrow V$ und $L_2 : V \rightarrow W$ zwei lineare Abbildungen, so ist auch die Verkettung $L_2 \circ L_1$ eine lineare Abbildung.

LA.7 Sind $L_1 : V \rightarrow W$ und $L_2 : V \rightarrow W$ zwei lineare Abbildungen, so ist auch die punktweise Summe

$$L_1 + L_2 : V \rightarrow W, v \mapsto L_1(v) + L_2(v)$$

eine lineare Abbildung.

Ist $L : V \rightarrow W$ lineare Abbildung, so ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch

$$\lambda \cdot L : V \rightarrow W, x \mapsto \lambda \cdot L(x)$$

eine lineare Abbildung.

Von zentraler Bedeutung für die Theorie linearer Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme ist die Linearität des Ableitens (oder Differenzierens): Für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$C(I, \mathbb{R}) := \{x : I \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ ist stetig}\}.$$

Diese Menge bildet zusammen mit der punktweisen Addition und punktweisen Multiplikation mit reellen Zahlen einen reellen Vektorraum. (Weshalb?) Ebenso bildet die Menge

$$C^1(I, \mathbb{R}) := \{x : I \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ ist stetig differenzierbar}\}$$

einen reellen Vektorraum, also einen Untervektorraum von $C(I, \mathbb{R})$. (Weshalb?)

Das Ableiten kann man als Abbildung

$$D : C^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R}), x \mapsto x' \quad (21)$$

auffassen. Diese Abbildung ist linear. (Weshalb?)

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist D surjektiv. Weiter gilt: Kern(D) sind genau die konstanten Funktionen auf I .

Wir verwenden diese Fakten nun um die Lösungsmenge \mathbb{L} einer linearen Differentialgleichung $x' = ax + b$ mit stetigen Koeffizientenfunktionen $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ zu analysieren:

FESTSTELLUNG 2.16: *Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_0 \subseteq C^1(I, \mathbb{R})$ einer homogenen linearen Differentialgleichung $x' = ax$ ist ein Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{R})$.*

Die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subseteq C^1(I, \mathbb{R})$ einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $x' = ax + b$ besitzt die Gestalt

$$\mathbb{L} = x_s + \mathbb{L}_0 = \{x_s + x : x \in \mathbb{L}_0\},$$

wobei $x_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $x' = ax + b$ und \mathbb{L}_0 die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung $x' = ax$ ist.

BEMERKUNG: Man vergleiche die Feststellung mit der in der linearen Algebra bewiesenen Aussage über die Struktur der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme.

BEWEIS: Der Beweis kann durch simples Rechnen mit Funktionen geführt werden – der Leser möge dies als Übung tun.

Ein begrifflicher Beweis verläuft so: Die Abbildung

$$L : C^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R}), x \mapsto x' - ax \quad (22)$$

ist linear, weil sie die Differenz zweier linearer Abbildungen ist: dem Ableiten und dem Multiplizieren mit der stetigen Funktion a – siehe (LA.7). Es gilt

$$\mathbb{L}_0 = \text{Kern}(L),$$

womit die erste Aussage der Feststellung bewiesen ist.

Die inhomogene lineare Differentialgleichung $x' = ax + b$ lässt sich mit Hilfe der Abbildung L nun als

$$L(x) = b$$

schreiben, womit die zweite Aussage der Feststellung aus (LA.5) folgt. \square

Die Feststellung 2.16 liefert zwar interessante Strukturinformation über die Lösungsmengen linearer Differentialgleichungen, wir wollen diese jedoch auch berechnen können.

SATZ 2.17: *Es seien $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Die auf dem Intervall I definierten Lösungen der linearen Differentialgleichung*

$$x' = ax + b$$

sind dann durch die Gleichungen

$$x(t) := x_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-A(\tau)} d\tau, \quad t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

gegeben, wobei

$$A(t) := \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau.$$

Insbesondere besitzt jedes AWP $x' = ax + b$, $x(t_0) = x_0$, eine eindeutige Lösung.

Eine homogene lineare Differentialgleichung ($b = 0$) besitzt den eindimensionalen Untervektorraum

$$\mathbb{R}e^{A(t)} = \{x_0 e^{A(t)} : x_0 \in \mathbb{R}\} \subset C^1(I, \mathbb{R})$$

als Lösungsmenge.

BEWEIS: Entsprechend Feststellung 2.16 bestimmt man zunächst die Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$x' = ax.$$

Da a stetig ist, existiert eine Stammfunktion A von a , die man nach dem Hauptsatz als

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$$

mit einem beliebigen $t_0 \in I$ schreiben kann. Nach der Kettenregel gilt dann

$$(e^A)' = A'e^A = ae^A,$$

das heißt die Funktion e^A ist eine Lösung der Differentialgleichung, und damit auch jedes skalare Vielfache x_0e^A , $x_0 \in \mathbb{R}$. Es bleibt zu zeigen, dass dies alle Lösungen $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ sind. Sei x eine Lösung; für diese gilt dann:

$$(xe^{-A})' = x'e^{-A} - xae^{-A} = axe^A - xae^A = 0.$$

Da I ein Intervall ist, muss also $xe^{-A} = x_0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gelten – dies ist die Behauptung.

Gemäß Feststellung 2.16 genügt es *eine* Lösung $x_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ der inhomogenen Differentialgleichung anzugeben, um *alle* Lösungen zu kennen. Diese findet man durch einen heuristischen Ansatz, der sogenannten *Variation der Konstanten*: Man betrachtet eine typische Lösung der homogenen Differentialgleichung, also ce^A , ersetzt die Konstante c durch eine (unbekannte) differenzierbare Funktion $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ und nimmt an für die gesuchte Lösung gelte $x = ce^A$. Ableiten ergibt

$$(ce^A)' = c'e^A + ace^A.$$

Ein Vergleich mit der rechten Seite der Differentialgleichung zeigt $b = c'e^A$, also $c' = be^{-A}$. Der Hauptsatz liefert

$$c(t) = \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-A(\tau)} d\tau + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Man beachte dabei, dass die gleiche untere Integralgrenze wie bei der Definition der Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung verwendet wird. Daher muss nun die Konstante d eingeführt werden, um alle Stammfunktionen von c' zu erhalten.

Es ist nun nachzuprüfen, ob die potentiellen Lösungen

$$x = ce^A = e^A \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-A(\tau)} d\tau + de^A$$

tatsächlich welche sind:

$$x' = ae^A \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-A(\tau)} d\tau + b + dae^A.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ergibt bei Einsetzen von x :

$$ax + b = a(e^A \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-A(\tau)} d\tau + de^A) + b = ae^A \int_{t_0}^t b(\tau)e^{-A(\tau)} d\tau + ade^A + b.$$

Es handelt sich also um Lösungen. Da nur eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung benötigt wird, kann man $d = 0$ setzen und erhält die im Satz angegebene Formel für alle Lösungen.

Es bleibt die Behauptung über AWP's zu beweisen: Die in Formel (23) angegebene Lösung besitzt die Eigenschaft $x(t_0) = x_0$. Es sei nun y eine zweite Lösung mit dieser Eigenschaft. Dann ist $x - y$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $x' = ax$, also von der Form ce^A und mit der Eigenschaft $ce^{A(t_0)} = x(t_0) - y(t_0) = 0$. Da die Exponentialfunktion positiv ist, folgt $c = 0$ und damit $x = y$. \square

BEISPIEL 2.18: Das AWP

$$x' = \frac{1}{t \ln(t)} x + \frac{1}{t}, \quad x(2) = x_0$$

soll gelöst werden.

Es ist $a = \frac{1}{t \ln(t)}$ und $b = \frac{1}{t}$. Dasjenige Intervall, auf dem a und b definiert sind, ist also $I = (1, \infty)$.

Es ist

$$A(t) = \int_2^t \frac{1}{\tau \ln(\tau)} d\tau = \ln(\ln(\tau)) \Big|_2^t = \ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2)),$$

wie ein Blick in eine Integraltabelle zeigt. Damit ist

$$e^{A(t)} = \frac{\ln(t)}{\ln(2)}$$

und folglich

$$\int_2^t b(\tau)e^{-A(\tau)} d\tau = \int_2^t \frac{\ln(2)}{\tau \ln(\tau)} d\tau = \ln(2)(\ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2))).$$

Als Lösung ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \frac{\ln(t)}{\ln(2)} + \frac{\ln(t)}{\ln(2)} \ln(2)(\ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2))) \\ &= x_0 \frac{\ln(t)}{\ln(2)} + \ln(t)(\ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2))). \end{aligned}$$

◇

Der einfachste Fall linearer Differentialgleichungen tritt auf, falls a und b konstant sind: Da die rechte Seite in diesem Fall nicht von t abhängt, kann man die Lösung mit dem Verfahren 2.8 finden. Hier soll jedoch stattdessen der Satz 2.17 zum Einsatz kommen.

Es ist

$$A(t) = \int_{t_0}^t a d\tau = a(t - t_0)$$

und damit

$$\int_{t_0}^t be^{-A(\tau)} d\tau = \int_{t_0}^t be^{-a(\tau-t_0)} d\tau = -\frac{b}{a}(e^{-a(t-t_0)} - 1).$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind also

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}(e^{-a(t-t_0)} - 1) = x_0 e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}(1 - e^{a(t-t_0)}).$$

Wir haben bewiesen:

KOROLLAR 2.19: *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$x' = ax + b, \quad x(t_0) = x_0$$

für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}(1 - e^{a(t-t_0)}).$$

Im Allgemeinen läuft das Bestimmen einer speziellen Lösung einer linearen Differentialgleichung auf eine häufig langwierige Integration hinaus – siehe den zweiten Summanden in der Gleichung (23). Diese kann manchmal umgangen werden, indem man für die gesuchte Lösung eine Ansatzfunktion mit noch zu bestimmenden Parametern benutzt, die man dann mit Hilfe der Differentialgleichung bestimmt. Dieses Verfahren ist natürlich nur dann anwendbar, wenn man vorab weiß, welche Ansatzfunktionen zu verwenden sind. Im Folgenden diskutieren wir eine Klasse von linearen Differentialgleichungen, die auf diese Weise lösbar sind: Man betrachte eine Differentialgleichung der Form

$$x' = ax + b, \quad b = \sum_{k=0}^n b_k t^k, \quad a, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung ist nach Satz 2.17 durch

$$\begin{aligned} x_s &= e^{a(t-t_0)} \int_{t_0}^t \left(\sum_{k=0}^n b_k \tau^k \right) e^{-a(\tau-t_0)} d\tau \\ &= e^{a(t-t_0)} \sum_{k=0}^n b_k \int_{t_0}^t \tau^k e^{-a(\tau-t_0)} d\tau \end{aligned}$$

gegeben. Für die Stammfunktionen der Funktionen $t^k e^{-a(t-t_0)}$ gilt die Rekursionsformel

$$\int t^k e^{-a(t-t_0)} dt = -\frac{1}{a} t^k e^{-a(t-t_0)} + \frac{k}{a} \int t^{k-1} e^{-a(t-t_0)} dt.$$

Hieraus folgt, dass die Stammfunktionen von $t^k e^{-a(t-t_0)}$ die Form $p_k(t) e^{-a(t-t_0)}$ besitzen, wobei p_k eine Polynomfunktion vom Grad k ist. Einsetzen in die Formel für x_s liefert unmittelbar:

FESTSTELLUNG 2.20: Eine lineare Differentialgleichung der Form $x' = ax + b$ mit konstantem Koeffizienten a und einer Polynomfunktion vom Grad n als Koeffizient b besitzt eine Polynomfunktion vom Grad n als Lösung.

Die Feststellung liefert als eine Ansatzfunktion für die dort betrachteten Differentialgleichungen.

BEISPIEL 2.21: Es sollen sämtliche Lösungen der Differentialgleichung

$$x' = 4x + t^2 - 1$$

ermittelt werden. Die Feststellung 2.20 liefert die Existenz einer speziellen Lösung der Form

$$x_s = a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$2a_2 t + a_1 = 4a_2 t^2 + 4a_1 t + 4a_0 + t^2 - 1 = (4a_2 + 1)t^2 + 4a_1 t + 4a_0 - 1.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$4a_2 + 1 = 0, \quad 2a_2 = 4a_1, \quad a_1 = 4a_0 - 1$$

also

$$x_s = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t + \frac{7}{32}.$$

Die gesamte Lösungsmenge der Differentialgleichung ist folglich

$$\mathbb{L} = \left\{ ce^{a(t-t_0)} + -\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t + \frac{7}{32} : c \in \mathbb{R} \right\}.$$

◇

Weitere Beispiele linearer Differentialgleichungen werden in den folgenden beiden Abschnitten diskutiert.

2.4 Modellieren mit Differentialgleichungen

Die Beschreibung bestimmter Aspekte eines Ausschnitts der realen Welt mit Hilfe mathematischer Objekte nennt man *mathematisches Modellieren* oder *mathematische Modellbildung*. So kann man beispielsweise frei fallende Körper in der Realität beobachten und Messungen des vom Körper durchfallenen Wegs in Abhängigkeit von der Zeit machen. Der Aspekt für den man sich interessiert ist hier also die Abhängigkeit zwischen Fallzeit und durchfallenen Weg. Das mathematische Modell für diese Abhängigkeit ist die Funktion

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

wobei t für die seit dem Beginn des Falls verstrichene Zeit steht, $g := 9.81 \frac{m}{s^2}$ und $s(t)$ der in der Zeitspanne t durchfallene Weg ist.

Ein »gutes« mathematisches Modell kann auf verschiedene Weise genutzt werden:

- Zur *Prognose* von Eigenschaften des betrachteten Ausschnitts der realen Welt: Ein Beispiel ist hier die Wetterprognose mit Hilfe von Gleichungssystemen, die das aktuelle Wettergeschehen beschreiben.
- Zur Ermittlung von Eigenschaften des betrachteten Ausschnitts der realen Welt, die man nicht direkt beobachten kann oder möchte: Die genaue Phosphatkonzentration im Wasser eines Tümpels, bei der der Tümpel ökologisch »umkippt«, möchte man eher nicht experimentell ermitteln. Man kann sie aber eventuell durch eine *Analyse des mathematischen Modells* bestimmen.
- Zur *Simulation* des betrachteten Ausschnitts der realen Welt: In der Astrophysik kann man beispielsweise das »Leben« eines Sterns über seine gesamte Lebensdauer hinweg in wenigen Stunden simulieren. Der reale Prozess spielt sich in Zeiträumen von mehreren hundert Millionen bis Milliarden Jahren ab.

Bei der Erstellung eines mathematischen Modells gilt als grundlegendes Prinzip: *So komplex wie nötig und so einfach wie möglich*. Ein Modell ist stets eine Annäherung an die reale Welt: Jedes Modell ist falsch. Die Güte eines Modells kann man dadurch schätzen, dass man die Modellprognosen über den modellierten Ausschnitt der realen Welt mit Messergebnissen vergleicht, einen Prozess, den man als *Modellvalidierung* bezeichnet. Insgesamt ergibt

sich der in Abbildung 8 dargestellte Arbeitsprozess beim mathematischen Modellieren.

In diesem und im folgenden Abschnitt werden einige einfache Beispiele des Modellierens mit Differentialgleichungen vorgestellt. Der Arbeitsschritt der Modellvalidierung wird dabei stets ausgespart, weil er die Durchführung von Messungen oder Experimenten erfordert.

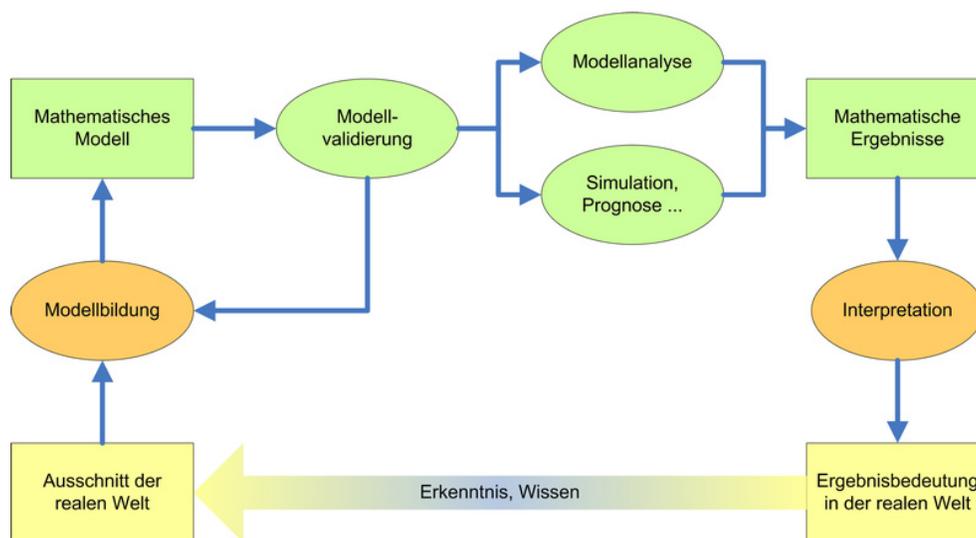


Abbildung 8: Der Prozess des mathematischen Modellierens

BEISPIEL 2.22 (DAS ABKÜHLUNGSGESETZ VON NEWTON⁴): Ein Körper einer bestimmten Temperatur, zum Beispiel eine Tasse Tee, befinde sich in einer Umgebung *konstanter* Temperatur, zum Beispiel einem Wohnraum. Wie verändert sich die Temperatur des Körpers?

Um zu einem mathematischen Modell dieser Situation zu kommen, beschreibt man die Temperatur des Körpers im Lauf der Zeit durch eine differenzierbare Funktion

$$T : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei t_0 derjenige Zeitpunkt ist, ab dem man die Temperaturveränderung des Körpers beschreiben möchte. Die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt t_0

⁴Sir Isaac Newton, 1643 – 1727

werde mit T_0 , die Temperatur des umgebenden Raums mit T_R bezeichnet. Zur Lebenszeit Newtons war eine physikalische Theorie der Wärme noch unbekannt, er machte daher den folgenden heuristischen Ansatz: Für »kleine« Zeitintervalle Δt ändert sich die Temperatur des Körpers gemäß

$$T(t + \Delta t) - T(t) = -\theta(T(t) - T_R)\Delta t,$$

wobei $\theta > 0$ eine Konstante ist, die den Wärmeübergang vom Körper in den umgebenden Raum beschreibt. Das Vorzeichen von θ ist so gewählt, dass die Temperaturänderung im Fall $T(t) > T_R$ negativ ist. Newton wählte seinen Ansatz also so, dass sich die Temperaturänderung bei Vervielfachung des kleinen(!) Zeitintervalls Δt entsprechend vervielfacht und die Geschwindigkeit

$$\frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

des Wärmeverlusts linear mit der Höhe der Körpertemperatur über der Raumtemperatur steigt.

Der Wert der Konstanten θ hängt von der Gestalt des Körpers (Größe der Oberfläche), sowie der physikalisch-chemischen Beschaffenheit des Körpers und des umgebenden Mediums (zum Beispiel Luft) ab.

Durch Grenzübergang ergibt sich eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$T'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = -\theta(T(t) - T_R). \quad (24)$$

Die Lösungen einer solchen Differentialgleichung wurden im Korollar 2.19 bereits bestimmt. Für den vorliegenden Fall ergibt sich

$$T(t) = T_0 e^{-\theta(t-t_0)} + T_R(1 - e^{-\theta(t-t_0)}). \quad (25)$$

Bemerkenswert an dieser Lösung ist, dass wegen $e^{-\theta(t_0-t)} + (1 - e^{-\theta(t_0-t)}) = 1$ die Temperatur $T(t)$ des Körpers zu jedem Zeitpunkt ein gewichtetes Mittel der Anfangstemperatur T_0 und der Umgebungstemperatur T_R ist. Die Bedingung $T_0 > T_R$ wird für die Herleitung der Differentialgleichung (24) nicht benötigt, diese gilt also auch im Fall einer Erwärmung des Körpers ($T_0 \leq T_R$).

Das Modell (25) für die Temperaturänderung besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. Im Fall $T_0 > T_R$ ist T eine streng monoton fallende, nach unten durch T_R beschränkte Funktion.

2. Im Fall $T_0 < T_R$ ist T eine streng monoton wachsende, nach oben durch T_R beschränkte Funktion.
3. Im Fall $T_0 = T_R$ ist $T = T_0$.
4. Im Fall $T_0 \neq T_R$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_R$, wobei der Wert T_R nicht angenommen wird.

Alle genannten Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Gleichung

$$T(t) = (T_0 - T_R)e^{-\theta(t-t_0)} + T_R$$

und der Tatsache, dass die Funktion $e^{-\theta(t-t_0)}$ streng monoton fallend ist.

Während die Modelleigenschaften 1 bis 3 die Realität der Erfahrung entsprechend abbilden, ist dies für Eigenschaft 4 zumindest zweifelhaft, da man erwartet, dass ein Körper nach endlicher Zeit die Raumtemperatur angenommen hat.

Um das Modell (25) zu validieren und um mit diesem Prognosen machen zu können, muss der Wert der Konstanten θ bekannt sein. Diesen kann man nur aus experimentellen Werten schätzen, wobei man wie folgt vorgeht: In einem Experiment misst man die Temperatur des in Rede stehenden Körpers zu hinreichend vielen Zeitpunkten $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Da die zugehörigen Temperaturmessungen $\tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_n$ Messfehler enthalten, sind sie nur Schätzungen der wahren Temperaturwerte des Körpers.

Die Modellgleichung (25) lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\ln(T(t) - T_R) = -\theta(t - t_0) + \ln(T_0 - T_R),$$

das heißt die Punkte $(t - t_0, \ln(T(t) - T_R)) \in \mathbb{R}^2$ liegen auf einer Geraden mit der Steigung $-\theta$. Dann muss dies näherungsweise auch für die Messwerte $(t_k - t_0, \ln(\tilde{T}_k - \tilde{T}_0))$ gelten. In Abbildung 9 links sind diese Werte für Messdaten dargestellt, die der Webseite von Jim Wilson, University of Georgia entnommen wurden. Sie stammen aus einem Experiment von Elizabeth Giesecking, in dem die Abkühlung von 800 ml Wasser in einem Glasbecher gemessen wurde. Die Raumtemperatur betrug $T_R = 23^\circ\text{C}$. Durch die Werte $(t_k - t_0, \ln(\tilde{T}_k - \tilde{T}_0))$ wurde mittels linearer Regression (Methode der kleinsten Quadrate) eine Ausgleichsgerade gelegt (Abbildung 9).

Sie besitzt die Gleichung

$$y = -0.026259t + 4.25496,$$

womit $\tilde{\theta} = 0.026259 \text{ min}^{-1}$ eine Schätzung für den Parameter θ ist. Verwendet man diesen Schätzer und stellt die Messdaten den Werten der Gleichung (25) gegenüber, so ergibt sich das in Abbildung 9 rechts dargestellte Bild. Das Wasser kühlt also stärker ab, als das Modell vorhersagt. Im Licht der Wärmelehre ist dieses Resultat zu erwarten, da ein warmer Körper nicht nur durch Kontakt seiner Oberfläche mit dem kälteren Medium der Umgebung Wärme verliert, sondern auch durch Strahlung (Stefan-Boltzmann-Gesetz). Hinzu kommt, dass sich in Wasser Konvektionsströmungen ausbilden können, die den Wärmeverlust ebenfalls erhöhen. Diese Effekte werden durch das simple Modell von Newton nicht berücksichtigt. \diamond

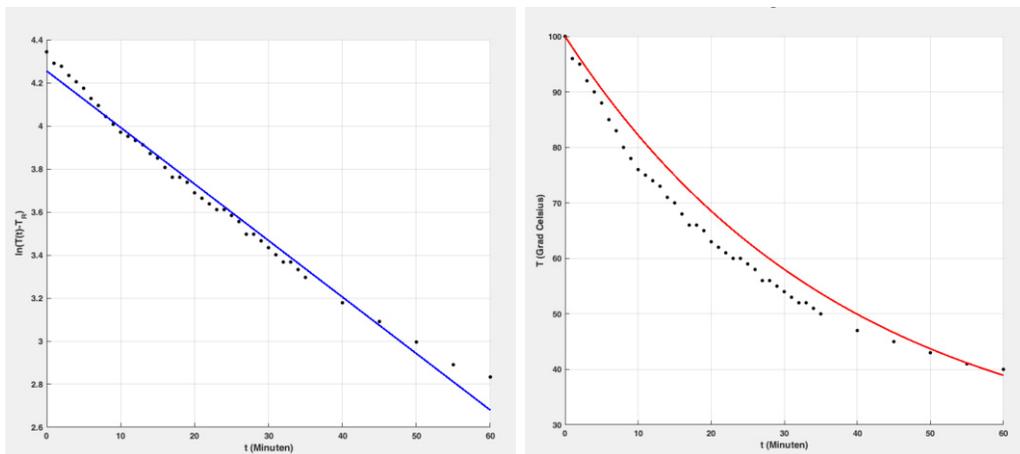


Abbildung 9: Experimentelle Bestimmung von θ im Abkühlungsgesetz für Wasser

BEISPIEL 2.23 (TEMPERATURSCHWANKUNGEN IM AQUARIUM): Ein sogenanntes Kaltwasseraquarium besitzt keine eigene Heizung des Wassers, dessen Temperatur passt sich also der Temperatur des umgebenden Raums an. Im Folgenden sollen die tageszeitabhängigen Temperaturschwankungen des Aquarienwassers im Lauf der Sommermonate modelliert werden. Es wird dabei die Annahme gemacht, dass sich die Temperatur T_R des Raums, in dem

das Aquarium steht, periodisch mit einer Periode von 24 Stunden ändert. Basis der Modellierung ist das Newton'sche Abkühlungsgesetz, wobei jetzt aber eine zeitabhängige Umgebungstemperatur T_R vorliegt. Die resultierende Differentialgleichung

$$T' = -\theta(T - T_R) = -\theta T + \theta T_R$$

ist zwar linear, der Koeffizient θT_R ist aber nicht konstant. Die Anwendung von Satz 2.17 führt zu der Lösung

$$T(t) = T_0 e^{-\theta(t-t_0)} + e^{-\theta(t-t_0)} \int_{t_0}^t \theta T_R(\tau) e^{\theta(\tau-t_0)} d\tau.$$

Die tageszeitlichen Temperaturschwankungen des Raums sollen mit Hilfe einer Sinus-Funktion beschrieben werden, was zwar sicher keine sehr realistische Annahme ist, aber für Demonstrationszwecke ausreicht. Es sei t_{\max} die Uhrzeit, zu der T_R ein Maximum annimmt, $\overline{T_R}$ sei die Tagesdurchschnittstemperatur und T_A sei die Amplitude der Temperaturschwankungen. Dann gilt also:

$$\begin{aligned} T_R(t) &= \overline{T_R} + T_A \sin\left(\frac{2\pi}{24}(t - t_{\max}) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \overline{T_R} + T_A \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - t_{\max}) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \overline{T_R} + T_A \sin(\omega(t - t_{\max}) + p), \end{aligned}$$

wobei $\omega := \frac{\pi}{12}$ und $p := \frac{\pi}{2}$; die Phasenverschiebung um p ist notwendig, um das Temperaturmaximum in die zweite Tageshälfte zu verschieben.

Die Lösung T kann nun konkreter bestimmt werden: Laut der Integral-tabelle in [B-S] ist

$$\int \sin(\omega(\tau - t_{\max}) + p) e^{\theta(\tau-t_0)} d\tau = \frac{e^{\theta(\tau-t_0)}}{\theta^2 + \omega^2} (\theta \sin(\omega(\tau - t_{\max}) + p) - \omega \cos(\omega(\tau - t_{\max}) + p)).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t T_R(\tau) e^{\theta(\tau-t_0)} d\tau &= \int_{t_0}^t \overline{T_R} e^{\theta(\tau-t_0)} d\tau + T_A \int_{t_0}^t \sin(\omega(\tau - t_{\max}) + p) e^{\theta(\tau-t_0)} d\tau \\ &= \frac{1}{\theta} \overline{T_R} (e^{\theta(t-t_0)} - 1) \\ &\quad + \frac{T_A}{\theta^2 + \omega^2} e^{\theta(t-t_0)} (\theta \sin(\omega(t - t_{\max}) + p) - \omega \cos(\omega(t - t_{\max}) + p)) \\ &\quad - \frac{T_A}{\theta^2 + \omega^2} (\theta \sin(\omega(t_0 - t_{\max}) + p) - \omega \cos(\omega(t_0 - t_{\max}) + p)). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit für die Lösung:

$$\begin{aligned}
 T(t) &= T_0 e^{-\theta(t-t_0)} + \overline{T_R} (1 - e^{-\theta(t-t_0)}) \\
 &\quad + \frac{\theta T_A}{\theta^2 + \omega^2} (\theta \sin(\omega(t - t_{\max}) + \frac{\pi}{2}) - \omega \cos(\omega(t - t_{\max}) + \frac{\pi}{2})) \\
 &\quad - \frac{\theta T_A}{\theta^2 + \omega^2} e^{-\theta(t-t_0)} (\theta \sin(\omega(t_0 - t_{\max}) + \frac{\pi}{2}) - \omega \cos(\omega(t_0 - t_{\max}) + \frac{\pi}{2})),
 \end{aligned}$$

wobei sich die trigonometrischen Term weiter vereinfachen lassen: Zunächst ist nach einem der Additionstheoreme

$$\cos(\omega(t - t_{\max}) + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\omega(t - t_{\max})),$$

es folgt also:

$$\begin{aligned}
 T(t) &= T_0 e^{-\theta(t-t_0)} + \overline{T_R} (1 - e^{-\theta(t-t_0)}) \\
 &\quad + \frac{\theta T_A}{\theta^2 + \omega^2} (\theta \sin(\omega(t - t_{\max}) + \frac{\pi}{2}) + \omega \sin(\omega(t - t_{\max}))) \\
 &\quad - \frac{\theta T_A}{\theta^2 + \omega^2} e^{-\theta(t-t_0)} (\theta \sin(\omega(t_0 - t_{\max}) + \frac{\pi}{2}) + \omega \sin(\omega(t_0 - t_{\max}))),
 \end{aligned}$$

Weiter gilt für Summen von Sinusfunktionen gleicher Frequenz die Beziehung

$$A_1 \sin(\omega t + p_1) + A_2 \sin(\omega t + p_2) = A \sin(\omega t + p_3),$$

wobei

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(p_2 - p_1)}$$

und

$$\tan(p_3) = \frac{A_1 \sin(p_1) + A_2 \sin(p_2)}{A_1 \cos(p_1) + A_2 \cos(p_2)}.$$

Im vorliegenden Fall ergibt dies

$$\theta \sin(\omega(t - t_{\max}) + \frac{\pi}{2}) + \omega \sin(\omega(t - t_{\max})) = \sqrt{\theta^2 + \omega^2} \sin(\omega(t - t_{\max}) + \arctan(\frac{\theta}{\omega})).$$

Damit gilt für die Lösung:

$$\begin{aligned}
 T(t) &= T_0 e^{-\theta(t-t_0)} + \overline{T_R} (1 - e^{-\theta(t-t_0)}) \\
 &\quad + \frac{\theta T_A}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \sin(\omega(t - t_{\max}) + \arctan(\frac{\theta}{\omega})) \\
 &\quad - \frac{\theta T_A}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} e^{-\theta(t-t_0)} \sin(\omega(t_0 - t_{\max}) + \arctan(\frac{\theta}{\omega})) \\
 &=: \overline{T}(t) + T_S(t) + \Delta(t).
 \end{aligned}$$

Dieses Modell der tageszeitlichen Temperaturschwankungen des Wassers im Kaltwasseraquarium führt zu einem guten Verständnis zum Beispiel des nach einem Wasserwechsel ablaufenden Temperaturanpassungsprozesses:

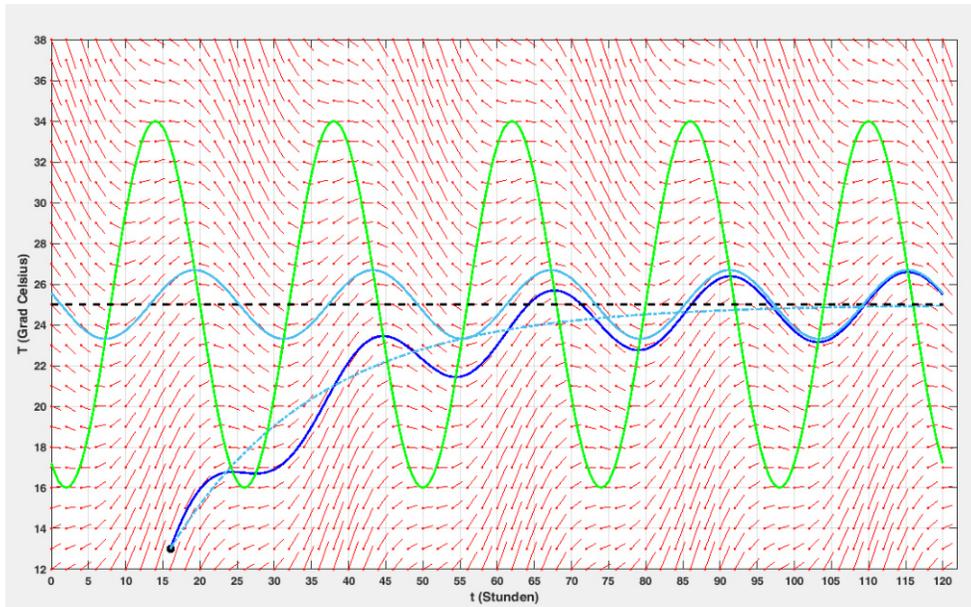


Abbildung 10: Temperaturschwankungen im Kaltwasseraquarium

Man nimmt an zum Zeitpunkt t_0 habe ein Wasserwechsel des Aquariums stattgefunden, der die Wassertemperatur auf den Wert T_0 gebracht hat. In der Abbildung 10 ist der Graph der Lösung T als dunkelblaue Kurve über einen Zeitraum von 104 Stunden nach dem Wasserwechsel dargestellt. Dabei werden folgende Werte verwendet:

$$\overline{T_R} = 25^\circ \text{C}, T_A = 9^\circ \text{K}, t_{\max} = 14 : 00, t_0 = 16 : 00, T_0 = 13^\circ \text{C}.$$

Die sich ergebenden tageszeitlichen Schwankungen der Raumtemperatur T_R sind als grün gefärbte Kurve zu sehen.

Der Temperaturverlauf T nach dem Wasserwechsel setzt sich aus drei Komponenten zusammen:

- Einem Erwärmungsprozess, der die initiale Wassertemperatur T_0 gemäß dem Newton'schen Abkühlungsgesetz an die mittlere Wassertemperatur $\overline{T_R}$ anpasst, wobei die Konstante θ durch die Geometrie des Aquariums, sowie durch die Tatsache, dass der Wärmeübergang zwischen Wasser und Luft stattfindet, definiert ist. Dieser Erwärmungsprozess

ist durch den Summanden

$$\bar{T}(t) = T_0 e^{-\theta(t-t_0)} + \bar{T}_R (1 - e^{-\theta(t-t_0)})$$

gegeben und in Abbildung 10 als hellblaue, durchbrochene Linie dargestellt.

- Einer harmonischen Temperaturschwingung, die durch die Gleichung

$$T_S(t) = \frac{\theta T_A}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \sin(\omega(t - t_{\max}) + \arctan(\frac{\theta}{\omega}))$$

gegeben ist. Man beachte, dass für die Amplitude dieser Schwingung

$$\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} T_A < T_A$$

gilt, das heißt die tageszeitlichen Temperaturschwankungen des Raums werden durch das Wasser gedämpft. Weiter ist die Schwingung gegenüber den Tagestemperaturschwankungen des Raums phasenverschoben, und zwar umso stärker je größer θ ist. In Newtons Abkühlungsgesetz steckt die Annahme, dass der Wärmeübergang im Wesentlichen über die Körperoberfläche erfolgt, größeres θ bedeutet also schnelleren Wärmeübergang bei gegebener Körpertemperatur. Da der »Körper« im vorliegenden Fall stets das Aquarium und das Medium stets Luft ist, kann ein schnellerer Wärmeübergang nur durch Vergrößerung der Aquarienoberfläche erzeugt werden. Folglich ist die Phasenverschiebung der Temperaturschwankungen bei größeren Aquarien größer als bei kleinen. Entsprechend den Eigenschaften des Arcus Tangens bleibt die Phasenverschiebung stets unter dem Wert $\frac{\pi}{2}$.

- Dem Term $\Delta(t)$, der die zum Zeitpunkt t noch vorliegende Abweichung von derjenigen Temperaturdynamik beschreibt, die das Aquarium ohne Wasserwechsel haben würde: Es gilt nämlich für große Teitintervalle $t - t_0$, also zeitlich lange nach dem Wasserwechsel,

$$T(t) \approx \bar{T}_R + \frac{\theta T_A}{\sqrt{\theta^2 + \omega^2}} \sin(\omega(t - t_{\max}) + \arctan(\frac{\theta}{\omega})) = \bar{T}_R + T_S(t),$$

da diejenigen Terme, die einen Exponentialfaktor enthalten, dann sehr klein sind. Dieser »eingeschwungene Zustand« $T_{\text{stabil}}(t)$ der Temperaturdynamik ist in Abbildung 10 als Kurve in hellblauer Farbe dargestellt. Er wird näherungsweise etwa 80 Stunden nach dem Wasserwechsel erreicht.

Man beachte, dass der »eingeschwungene Zustand« *nicht* von den Anfangsbedingungen t_0 und T_0 abhängt.

◇

2.5 Modellierung von Wachstumsprozessen

In diesem Abschnitt werden einfache Modelle für Wachstumsprozesse betrachtet, wie zum Beispiel die zeitliche Veränderung der folgenden Größen:

- die Anzahl der Lebewesen einer bestimmten Art in einem bestimmten Lebensraum,
- die Masse eines Tumors,
- der Energieverbrauch der Weltbevölkerung,
- das Längenwachstum eines Baumes.

Für die Modellierung wird stets angenommen, dass die betrachtete Größe x differenzierbar von der Zeit t abhängt. Im Fall von diskreten Größen wie der Anzahl von Lebewesen erscheint dies unrealistisch. Das Umwandeln einer diskreten Größe in eine kontinuierliche ist jedoch ein Standardwerkzeug der Mathematik, dessen Anwendung sich dadurch rechtfertigen lässt, dass die so ermittelten Zeitverläufe von x die diskreten Werte annähern – man spricht in diesem Zusammenhang auch von *Regression*.

Für kleine Zeitänderungen Δt erscheinen folgende Annahmen realistisch:

- Der *momentane Zuwachs* $x(t + \Delta t) - x(t)$ ist proportional zu Δt .
- Die *momentane Wachstumsgeschwindigkeit* $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ ist proportional zu $x(t)$.

Es ergibt sich

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \alpha(t, x(t))x(t)\Delta t,$$

wobei man den Faktor $\alpha(t, x(t))$ als *momentane Wachstumsrate* bezeichnet. Man beachte die doppelte Abhängigkeit der Wachstumsrate von der Zeit:

- Die Wachstumsrate kann explizit von der Zeit abhängen. Zum Beispiel ist das Paarungsverhalten vieler Tierarten an bestimmte Jahreszeiten gekoppelt.

- Die Wachstumsrate kann über die Größe x implizit von der Zeit abhängen. Zum Beispiel benötigt eine große Population von Lebewesen mehr Nahrung als eine kleine. In einem begrenzten Lebensraum kann Wachstum also die Wachstumsrate verringern.

Da x als differenzierbar nach t vorausgesetzt wird, folgt durch Grenzübergang die allgemeine Wachstumsdifferentialgleichung

$$x' = \alpha(t, x)x, \quad (26)$$

wobei die Wachstumsrate α noch unspezifiziert bleibt.

Für das Folgende sei noch angemerkt, dass Zuwachs im mathematischen Sinn auch negativ sein kann, dass also auch eine Verminderung der Größe x mit unter den Begriff »Wachstum« fällt.

EXPONENTIELLES WACHSTUM

Hängt die Wachstumsrate $\alpha(t, x)$ weder von der Zeit t noch von x ab, so ergibt sich die einfache Differentialgleichung

$$x' = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

mit den Lösungen

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}, \quad t_0, x_0 \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Ein solches Wachstumsgesetz liegt zum Beispiel dann vor, wenn das Wachstum einer Population von Lebewesen die dafür benötigten Ressourcen nur geringfügig beeinflusst, weil diese Ressourcen im Übermaß vorhanden sind, und wenn keine anderen Faktoren die Vermehrung beeinflussen. In der Realität liegt diese Situation beim Wachstum von Bakterien in einem optimalen Umfeld vor, zum Beispiel bei der Züchtung von Bakterien auf einem Nährboden (Abbildung 11, rechts): Bakterien sind Einzeller ohne Zellkern (*Prokaryonten*, Abbildung 11, links), die sich durch Zellteilung vermehren. Gelangt zum Zeitpunkt t_0 eine kleine Bakterienmenge x_0 in ein wachstumsförderndes Umfeld, so passen diese Bakterien zunächst ihren Stoffwechsel an die vorliegenden Bedingungen an, wobei kein wesentliches Populationswachstum eintritt. Danach stellt sich eine Phase exponentiellen Wachstums ein, die solange anhält, wie die vorhandenen Nahrungsressourcen dies zulassen. Beispielsweise wächst das Tuberkulosebakterium *Mycobacterium tuberculosis* etwa mit einer Wachstumsrate von

$$\alpha = 0.05 \text{ h}^{-1}.$$

Bringt man also eine Bakterienpopulation von $x_0 = 10$ auf einen Nährboden, so sind 24 Stunden nach dem Beginn der Wachstumsphase zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ etwa

$$x(24) = 10e^{24h \cdot 0.05h^{-1}} \approx 33$$

Bakterien vorhanden.

Die Zeitspanne t_d , die eine Population der Größe $x_1 := x(t_1)$ benötigt um sich zu verdoppeln, nennt man die Verdopplungs- oder Generationszeit. Man kann sie aus der Gleichung

$$x(t_1 + t_d) = 2x_1 = x_0 e^{\alpha(t_1 + t_d)}$$

bestimmen. Es ergibt sich

$$t_d = \frac{\ln(2)}{\alpha},$$

die Generationszeit ist also nicht von $x(t_1)$ abhängig. Im Fall von Tuberkulosebakterien ergibt sich $t_d \approx 13.86 h$.



Abbildung 11: Bakterien auf einem Nährboden

HYPERBOLISCHES WACHSTUM

Die Individuen einer Population sind möglicherweise in der Lage ihre Umwelt wachstumsfördernd umzugestalten. In diesem Fall kommt es zu einer positiven Rückkopplung zwischen der Populationsgröße und der Wachstumsrate, weil mehr Individuen die Umwelt stärker positiv beeinflussen können. Ein simples Modell für diese Art von Wachstum wird durch die Differentialgleichung

$$x' = (\gamma x)\beta x = \beta\gamma x^2, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{>0} \quad (29)$$

geliefert, in der die Konstante β die Wachstumsrate *ohne* Berücksichtigung der Umweltumgestaltung und γx die populationsabhängige Verstärkung von β durch die Umweltumgestaltung beschreibt. Man beachte, dass in diesem Modell stets positives Wachstum vorausgesetzt wird.

Die Wachstumsverstärkung *multiplikativ* zu modellieren ist nicht zwingend, andere Kombinationen von β und γx sind denkbar. Bezieht man sich auf das allgemeine Wachstumsmodell (26), so gilt

$$\alpha(t, x) = \beta\gamma x.$$

Die Differentialgleichung (29) zeigt unmittelbar, dass für eine Lösung x an jeder Stelle t mit $x(t) \neq 0$ die Ungleichung $x'(t) > 0$ gilt. Lösungen $x \neq 0$ – die Nullfunktion ist eine Lösung – sind also streng monoton wachsend. Sie lassen sich mit dem Verfahren 2.8 ermitteln: Wegen der Nullstelle der rechten Seite bei $x = 0$ müssen dabei die Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ unterschieden werden. In beiden Fällen gilt:

$$t_1(\xi) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{1}{\beta\gamma\zeta^2} d\zeta + t_0 = -\frac{1}{\beta\gamma\zeta} \Big|_{x_0}^{\xi} + t_0 = \frac{1}{\beta\gamma x_0} - \frac{1}{\beta\gamma\xi} + t_0.$$

Im ersten Fall ist der Definitionsbereich der Lösung

$$I_1 = t_1((-\infty, 0)) = \left(\frac{1}{\beta\gamma x_0} + t_0, \infty\right)$$

und im zweiten Fall

$$I_1 = t_1((0, \infty)) = \left(-\infty, \frac{1}{\beta\gamma x_0} + t_0\right).$$

Auf diesen Intervallen ist die Lösung jeweils durch die Abbildungsvorschrift

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \beta\gamma(t - t_0)} \tag{30}$$

gegeben. Diese besitzt an der Stelle $t_s := \frac{1}{\beta\gamma x_0} + t_0$ einen Pol und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_s} x_1(t) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } x_0 < 0, \\ \infty & \text{falls } x_0 > 0. \end{cases}$$

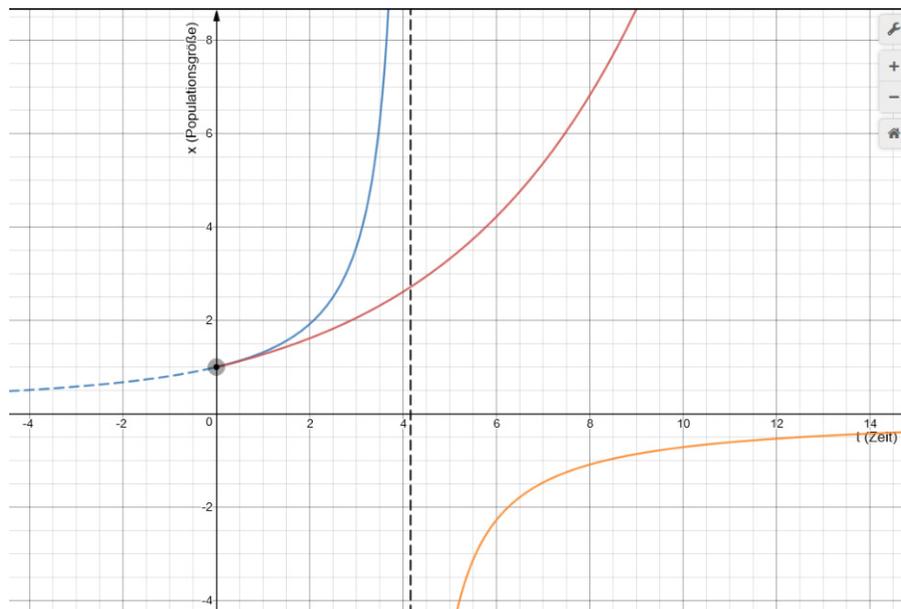


Abbildung 12: Hyperbolisches Wachstum bei $\beta = 1.2$, $\gamma = 0.2$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$

Interpretiert man x tatsächlich als Individuenzahl einer Population, so ist nur der Fall $x_0 > 0$ relevant. In diesem Fall ist x streng monoton wachsend und besitzt nach endlicher Zeit(!) eine sogenannte *Singularität*, nämlich die Polstelle. Während exponentielles Wachstum in einer Umwelt mit endlichen Ressourcen zu einer katastrophalen Entwicklung führt, ist dies für hyperbolisches Wachstum sogar in einer Umwelt mit unendlichen Ressourcen der Fall.

In Abbildung 12 ist für den Fall $\beta = 1.2$ und $\gamma = 0.2$ die Lösung x des AWP $x(0) = 1$ in blauer Farbe dargestellt; die Singularität liegt bei $t_s = \frac{25}{6} \approx 4.16$. Zum Vergleich ist in roter Farbe auch ein exponentielles Wachstum mit dem Wachstumfaktor $\beta\gamma$ und $x(0) = 1$ dargestellt. Die Kurve in orange zeigt eine Lösung mit $x_0 < 0$.

Es wird von verschiedenen Forschern angenommen, dass die menschliche Population der Erde zumindest zeitweise hyperbolisch gewachsen ist. Dies kann man gegebenenfalls dadurch erklären, dass der Mensch seine Lebensbedingungen aktiv zum Besseren umzugestalten versucht. Beispiele für solche gestaltenden Maßnahmen sind das Leben in Behausungen statt im Freien, die

Einführung der Landwirtschaft anstelle des Daseins als Jäger und Sammler und die Entwicklung der Medizin. Die Abbildung 13 ist dem Artikel [Nie] entnommen, in dem der Autor Nielsen die These vertritt, dass das Wachstum der Menschheit in der Vergangenheit zwei hyperbolischen Phasen mit unterschiedlichen Wachstumsfaktoren gefolgt ist, zwischen denen etwa im Zeitraum 500 v. Chr. bis 500 n. Chr. ein Übergang stattfand.

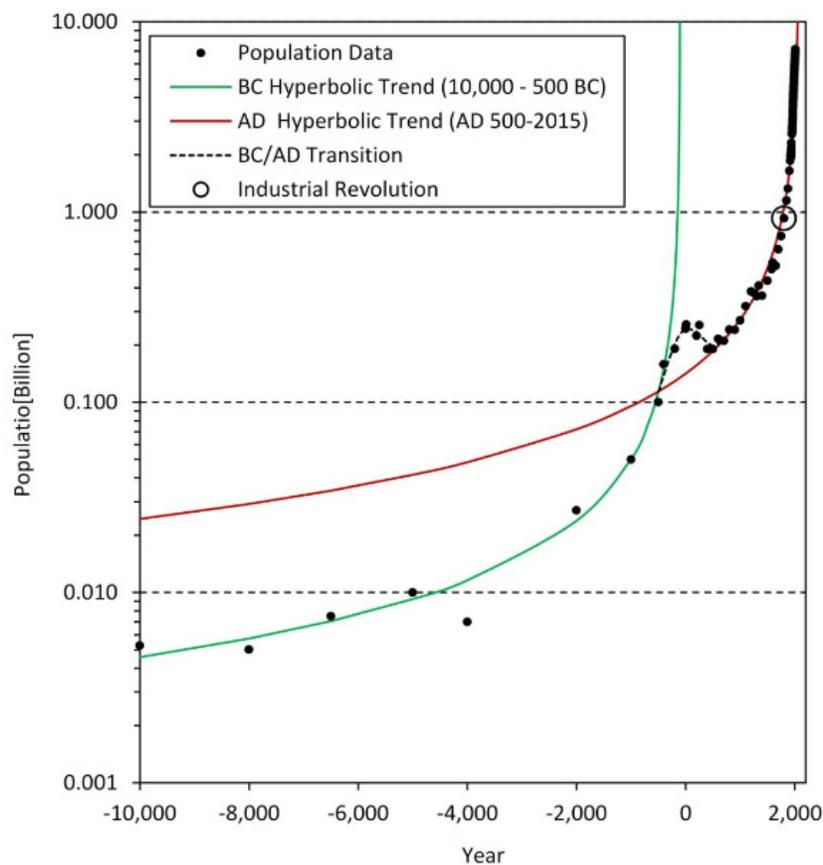


Abbildung 13: Hyperbolisches Wachstum der Menschheit nach R. W. Nielsen

SAISONALES WACHSTUM

Das Wachstum von Populationen wie auch von einzelnen Lebewesen unterliegt häufig periodischen Schwankungen. Gründe hierfür sind beispielsweise:

- jahreszeitliche Schwankungen der Temperaturen des Lebensraums,
- periodische Änderungen im Nahrungsangebot, die ebenfalls durch Jahreszeiten, im Fall mariner Lebenformen aber auch durch wechselnde Meereströmungen verursacht sein können,
- saisonales Paarungsverhalten.

Für eine Population von Lebewesen in einem ressourcenreichen Lebensraum, könnte man eine saisonal schwankende Wachstumsrate etwa wie folgt modellieren:

$$x' = (\beta_0 + \beta_1 \sin(\omega t))x, \quad \beta_0, \beta_1, \omega \in \mathbb{R}^{>0}. \quad (31)$$

Hierbei sind ω die Frequenz und β_1 die Amplitude der Schwankungen des Wachstumsfaktors; β_0 ist sein durchschnittlicher Wert. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden: Kann die Population aufgrund der saisonalen Gegebenheiten sogar schrumpfen, zum Beispiel infolge von jahreszeitlich bedingter Nahrungsknappheit, so ist $\beta_0 < \beta_1$. Falls ein solches Schrumpfen nicht möglich ist, ist notwendig $\beta_0 \geq \beta_1$. In jedem Fall handelt es sich um eine homogene lineare Differentialgleichung. Satz 2.17 liefert die Lösungen:

$$x(t) = x_0 e^{\beta_0 t - \frac{\beta_1}{\omega} \cos(\omega t)} = x_0 e^{-\frac{\beta_1}{\omega} \cos(\omega t)} e^{\beta_0 t}. \quad (32)$$

Den prinzipiellen Verlauf eines solchen Wachstums zeigen die blau gefärbten Kurven in der Abbildung 14, wobei die durchgezogene Linie den Fall $\beta_0 < \beta_1$ und die durchbrochene Linie den Fall $\beta_0 > \beta_1$ wiedergibt. Zum Vergleich ist in oranger Farbe auch die Wachstumskurve $x(t) = x_0 e^{\beta_0 t}$ eingezeichnet.

BERTALANFFY-WACHSTUM

In der Realität ablaufende Wachstumsprozesse finden in einer Umgebung mit beschränkten Ressourcen statt. Da eine wachsende Population immer mehr dieser Ressourcen benötigt, muss in einem realistischen Wachstumsmodell die Wachstumsrate mit zunehmender Population schließlich kleiner oder sogar negativ werden. Man bedenke dabei, dass der Begriff »Ressource« hier sehr allgemein zu verstehen ist. Er schließt alle Größen ein, die den betrachteten Wachstumsprozess ermöglichen.

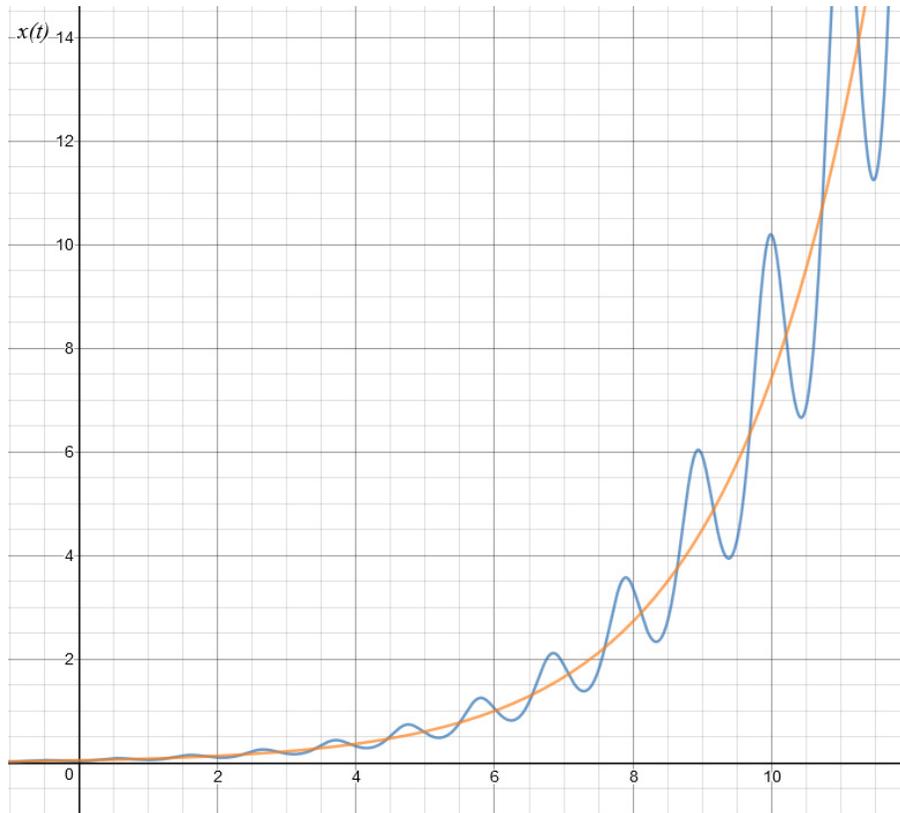


Abbildung 14: Saisonales Wachstum in ressourcenreicher Umwelt

Eine einfache Idee zur Modellierung des Wachstums von *Populationen* unter Ressourcenbeschränkung besteht in der Annahme, dass der dann notwendigerweise beschränkte Lebensraum eine Population der maximalen Größe $x_L > 0$ dauerhaft »tragen« kann. Dieser Idee folgend wird die Wachstumsrate der Population umso kleiner werden, je näher die Populationsgröße der Maximal- oder *Grenzpopulationsgröße* x_L kommt. Geht man dabei von einer linearen Kopplung zwischen Wachstumsrate und Annäherung an die Grenzpopulationsgröße x_L aus, so ergibt sich die von dem Biologen und Systemtheoretiker Ludwig von Bertalanffy (1901 – 1972) eingeführte lineare Differentialgleichung

$$x' = \beta(x_L - x) \quad (33)$$

mit einer Konstanten $\beta > 0$. Von der Form her ähnelt die Differentialgleichung

chung dem Newton'schen Abkühlungsgesetz und nach Korollar 2.19 sind ihre Lösungen

$$x(t) = x_0 e^{\beta(t_0-t)} + x_L(1 - e^{\beta(t_0-t)}) = x_L - (x_L - x_0)e^{\beta(t_0-t)}. \quad (34)$$

Die Lösungen x sind im hier interessierenden Fall $x_0 < x_L$ folglich streng monoton wachsend und besitzen die Asymptotik

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_L.$$

Weiter besitzt jede solche Lösung genau eine Nullstelle, nämlich

$$t^* = t_0 - \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{x_L}{x_L - x_0}\right).$$

Im Intervall (t^*, ∞) lösen die Funktionen x also die Differentialgleichung

$$x' = \beta\left(\frac{x_L}{x} - 1\right)x.$$

Vergleicht man diese Differentialgleichung mit dem allgemeinen Wachstumsmodell (26), so erhält man

$$\alpha(t, x) = \beta\left(\frac{x_L}{x} - 1\right)$$

und damit auch eine Interpretation von β als die Wachstumsrate der Population bei der Populationsgröße $\frac{1}{2}x_L$. Für $x < \frac{1}{2}x_L$ wächst die Population mit einer Rate größer als β , während das Wachstum für $x > \frac{1}{2}x_L$ mit einer Rate kleiner als β erfolgt.

Der Verlauf eines Bertalanffy-Wachstums ist in der Grafik 15 als Kurve in blauer Farbe dargestellt; es wurden die Werte $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_L = 10$ und $\beta = 0.1$ verwendet. Die Horizontale in dunklem Orange markiert die Grenzpopulationsgröße.

In der Biologie wird basierend auf den Ideen von Bertalanffy [Ber] die Differentialgleichung (33) unter anderem genutzt, um das Wachstum *einzelner* Organismen zu beschreiben. Hierbei kann man den Organismus als Population seiner Zellen ansehen, die sich beim Wachsen vermehren. Die Wachstumsgrenze x_L und die Wachstumsrate β werden dann einerseits durch die Genetik vorgegeben, aber auch durch das Umfeld, in dem der Organismus wächst. Natürlich kann man in der Praxis nicht die Anzahl der Zellen eines

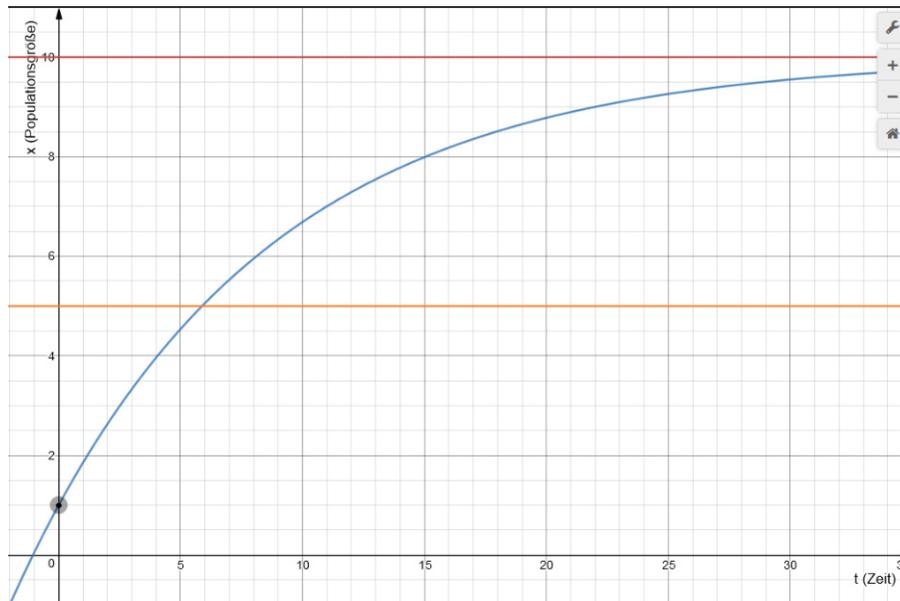


Abbildung 15: Bertalanffy-Wachstum

Organismus ermitteln. Als Ersatz wird man daher eine mit der Zellenzahl korrelierte Größe wie das Gewicht oder die Körperlänge verwenden. Es entsteht dann das Problem der Bestimmung der Parameter x_L und β für Organismen einer bestimmten Art. Dieses soll an einem konkreten Beispiel diskutiert werden: Es soll ein Bertalanffy-Modell für das Längenwachstum einer bestimmten Fischart, nämlich des Steinbutts (*Scophthalmus maximus*, Abbildung 16, links) erstellt werden. In einer realistischen Situation würde man hierzu Daten zur Länge vieler Steinbutte verschiedenster Alter $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ erheben und für jedes erhobene Alter t_k eine mittlere Länge x_k berechnen. Mittels der Daten (t_k, x_k) , $k \in \{1, \dots, n\}$, lassen sich dann Schätzungen der Parameter x_L und β ermitteln. Im Folgenden sollen nur die Daten *eines* Steinbutts genutzt werden; das prinzipielle Vorgehen ändert sich dadurch nicht. Die Daten sind in Abbildung 16 rechts grafisch dargestellt: Gezeigt ist das Alter des untersuchten Steinbutts in Jahren und seine Länge in Zentimetern. Die Angaben wurden dem Artikel [Men] entnommen.

Zur Ermittlung von β und x_L wird das Verfahren von Ford-Walford [Walf] verwendet: Nimmt man an, die Datenerhebungszeitpunkte t_k besitzen alle den gleichen, im Verhältnis zur Lebenszeit des Organismus nicht zu großen

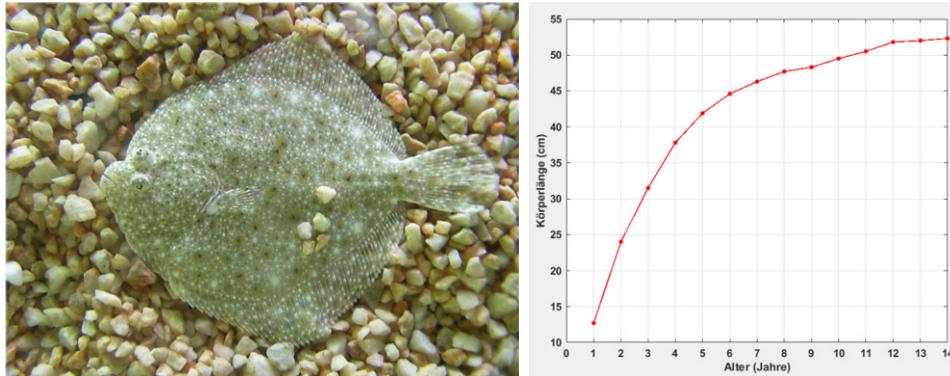


Abbildung 16: Der Steinbutt und sein Längenwachstum

Zeitabstand Δt , so gilt aufgrund der Bertalanffy-Differentialgleichung näherungsweise:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &\approx x(t_{k+1}) - x(t_k) \\ &\approx \beta(x_L - x(t_k))\Delta t \\ &\approx -\beta\Delta t x_k + \beta x_L \Delta t. \end{aligned}$$

Man erhält also die näherungsweise lineare Relation

$$x_{k+1} \approx (1 - \beta\Delta t)x_k + \beta x_L \Delta t =: m x_k + c$$

aus deren Koeffizienten m und c man dann die gesuchten Parameter gewinnen kann:

$$\beta = \frac{1 - m}{\Delta t}, \quad x_L = \frac{c}{1 - m}.$$

Ermittelt man die Koeffizienten m und c mittels der Methode der kleinsten Quadrate (siehe Abbildung 17, links), so ergibt sich

$$m = 0.72, \quad c = 14.61$$

und damit

$$\beta = 0.28 \text{ cm}^{-1}, \quad x_L = 52.35 \text{ cm}.$$

Löst man das AWP

$$x' = 0.28 \text{ cm}^{-1}(52.35 \text{ cm} - x), \quad x(t_1) = x_1,$$

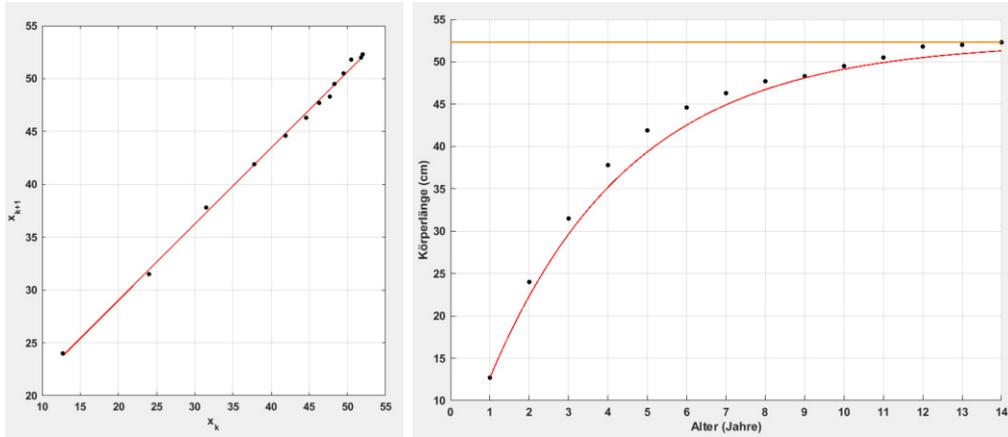


Abbildung 17: Bertalanffy-Modell des Steinbuttwachstums

die Anfangsbedingung ist also durch den ersten Datenpunkt (t_1, x_1) gegeben, so ergibt sich die in Abbildung 17, rechts dargestellte Wachstumskurve. Der Verlauf der Kurve folgt zwar prinzipiell dem Verlauf der Daten, diese werden aber systematisch unterschätzt, sodass eine genaue Analyse der Parameterschätzung angezeigt ist: die geschätzte Grenzlänge x_L scheint zu klein; dasselbe gilt für die Wachstumsrate β , da die Krümmung der Wachstumskurve im mittleren Altersbereich nicht stimmt.

Fische wachsen in jahreszeitlich variierender Geschwindigkeit. Daher wurde von I. F. Somer [Som] das folgende saisonal angepasste Bertalanffy-Modell für das Fischwachstum vorgeschlagen:

$$x' = \beta(t)(x_L - x), \quad \beta(t) := \bar{\beta} + \beta_A \sin(2\pi(t - t_W) + \frac{3\pi}{2}). \quad (35)$$

Hierbei ist:

- $x_L > 0$ die Maximallänge der betrachteten Fischart,
- $\bar{\beta} > 0$ die durchschnittliche Wachstumsrate,
- $\beta_A \in [0, \bar{\beta}]$ die Amplitude der jährlichen Wachstumsratenvariation,
- t_W der sogenannte Winterpunkt mit minimaler Wachstumsrate.

Die Zeit t muss in diesem Modell in Jahren angegeben werden.



Abbildung 18: Ostseedorsch

Das Somer-Modell ist eine lineare Differentialgleichung mit den Koeffizienten $a(t) = -\beta(t)$ und $b(t) = x_L\beta(t)$. Satz 2.17 liefert für die Anfangswerte $x(t_0) = 0$, das heißt der betrachtete Fisch wird zum Zeitpunkt t_0 »geboren«:

$$x(t) := x_L e^{A(t)} \int_{t_0}^t \beta(\tau) e^{-A(\tau)} d\tau,$$

wobei

$$\begin{aligned} A(t) &= - \int_{t_0}^t \beta(\tau) d\tau \\ &= - \int_{t_0}^t (\bar{\beta} + \beta_A \sin(2\pi(\tau - t_W) + \frac{3\pi}{2})) d\tau \\ &= -(\bar{\beta}(t - t_0) + \frac{\beta_A}{2\pi} (\cos(2\pi(t_0 - t_W) + \frac{3\pi}{2}) - \cos(2\pi(t - t_W) + \frac{3\pi}{2}))) \end{aligned}$$

Wegen $A' = -\beta$ ergibt sich

$$\int_{t_0}^t \beta(\tau) e^{-A(\tau)} d\tau = e^{-A(t)} - e^{-A(t_0)} = e^{-A(t)} - 1$$

und damit

$$x(t) = x_L e^{A(t)} (e^{-A(t)} - 1) = x_L (1 - e^{A(t)}).$$

Die Abbildung 19 zeigt die Wachstumskurve eines Dorsches (Abbildung 18) zu den Parametern $t_0 = 0$, $x_L = 95$ cm, $\bar{\beta} = 0.16 = \beta_A$ und $t_W = \frac{1}{12}$ (etwa entsprechend dem 30. Januar eines Jahres).

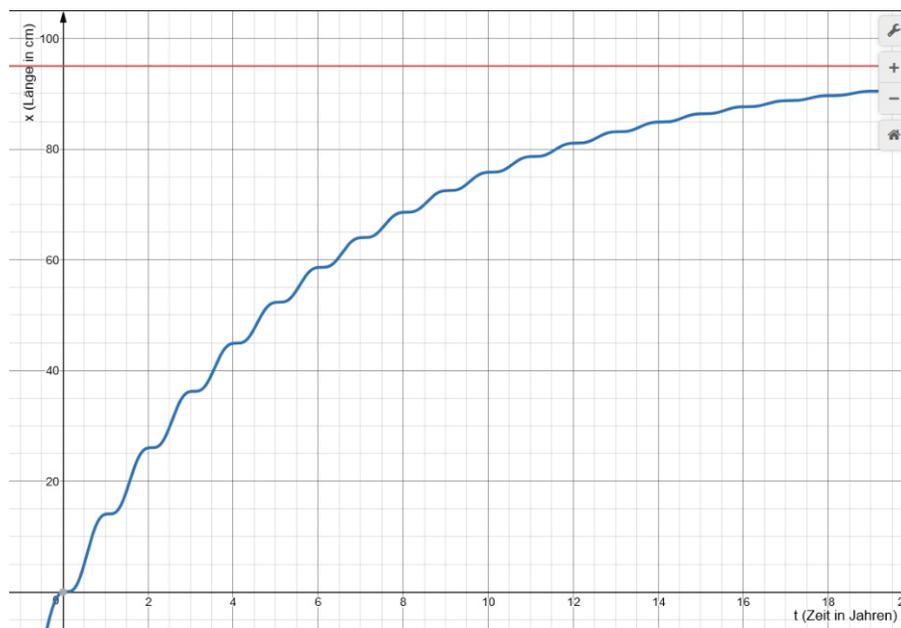


Abbildung 19: Saisonal angepasstes Bertalanffy-Modell des Dorschwachstums

LOGISTISCHES WACHSTUM

Im Bertalanffy-Wachstumsmodell wird der Effekt beschränkter Ressourcen durch den Faktor $x_L - x$ modelliert. Der Mathematiker Verhulst⁵ hat diesen Effekt etwas anders modelliert: Wie Bertalanffy geht er von einer durch die Ressourcenbeschränktheit gegebenen Grenzpopulation $x_L > 0$ aus, modelliert die Wachstumsratenfunktion aber als

$$\alpha(t, x) = \alpha_0 \left(1 - \frac{x}{x_L}\right),$$

wobei $\alpha_0 > 0$ als Wachstumsrate, die bei unbeschränkten Ressourcen auftreten würde, interpretiert werden kann. Es ergibt sich die so genannte *logistische Differentialgleichung*

$$x' = \alpha_0 \left(1 - \frac{x}{x_L}\right) x = \alpha_0 x - \frac{\alpha_0}{x_L} x^2, \quad \alpha_0, x_L > 0; \quad (36)$$

⁵Pierre Francois Verhulst, belgischer Mathematiker, 1804 – 1849

sie ist nicht linear. Um Ähnlichkeiten mit dem Bertalanffy-Wachstum hervorzuheben, wird sie manchmal auch in der Form

$$x' = \frac{\alpha_0}{x_L}(x_L - x)x \quad (37)$$

geschrieben.

Aufgrund der Problemstellung wird man zunächst nur nach Lösungen $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ suchen, die keine Nullstellen besitzen. In diesem Fall kann man die Differentialgleichung durch x , hier sogar durch x^2 , teilen ohne das Lösungsverhalten in Bezug auf solche Lösungen zu ändern. Es ergibt sich

$$\frac{x'}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)' = \alpha_0 \frac{1}{x} - \frac{\alpha_0}{x_L}.$$

Setzt man $y := -\frac{1}{x}$, so ergibt sich die lineare Differentialgleichung

$$y' = -\alpha_0 y - \frac{\alpha_0}{x_L} \quad (38)$$

mit konstanten Koeffizienten.

Jede nullstellenfreie Lösung von (36) liefert also eine nullstellenfreie Lösung von (38).

Ist umgekehrt y eine nullstellenfreie Lösung von (38), so rechnet man direkt nach, dass $x := -\frac{1}{y}$ eine Lösung der logistischen Differentialgleichung ist.

Die Lösungen von (38) (alle!) lassen sich nach Satz 2.17 bestimmen:

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha_0(t-t_0)} - \frac{1}{x_L}(1 - e^{-\alpha_0(t-t_0)}). \quad (39)$$

Sie sind jeweils durch die Vorgabe $y(t_0) = y_0$ eindeutig bestimmt.

Im vorliegenden Kontext interessiert man sich ausschließlich für die Lösung von AWP's $x(t_0) = x_0 < x_L$, $x_0 > 0$. Diese Vorgabe korrespondiert zu $y_0 = -\frac{1}{x_0} < -\frac{1}{x_L}$. Die Formel (39) zeigt, dass die zugehörigen Lösungen nullstellenfrei sind. Folglich ergeben sich *alle* Lösungen zu den genannten AWP's der logistischen Differentialgleichung zu

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} e^{-\alpha_0(t-t_0)} + \frac{1}{x_L}(1 - e^{-\alpha_0(t-t_0)})}. \quad (40)$$

Eine Analyse der logistischen Differentialgleichung und der Lösungen (40) enthüllt folgende Details – man beachte, dass es manchmal angenehmer ist mit der Differentialgleichung anstelle der Formel für die Lösungen zu arbeiten:

- Der Nenner in (40) ist stets ein gewichtetes Mittel der Zahlen $\frac{1}{x_L}$ und $\frac{1}{x_0}$, folglich gilt für die Werte einer logistischen Wachstumsfunktion $x([t_0, \infty)) \subseteq [x_0, x_L]$.
- Asymptotik: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_L$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.
- Logistische Wachstumsfunktionen sind streng monoton wachsend: Die Differentialgleichung (37) zeigt, dass für $x(t) < x_L$ stets $x'(t) > 0$ gilt.
- Logistische Wachstumsfunktionen besitzen genau einen Wendepunkt mit dem Funktionswert $x(t_w) = \frac{x_L}{2}$ und der Tangentensteigung $x'(t_w) = \frac{\alpha_0 x_L}{4}$: Für die zweite Ableitung ergibt sich aus der logistischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x'' &= \alpha_0 x' - \frac{\alpha_0}{x_L} 2x x' \\ &= (\alpha_0 x - \frac{\alpha_0}{x_L} x^2) (\alpha_0 - 2 \frac{\alpha_0}{x_L} x). \end{aligned}$$

Neben den im vorliegenden Fall ausgeschlossenen Nullstellen $x = 0$ und $x = x_L$ besitzt die rechte Seite die Nullstelle

$$x = \frac{x_L}{2}.$$

Die Abbildung 20 zeigt die Lösung des AWP $x(0) = 1$ der logistischen Differentialgleichung für die Parameterwerte $x_L = 10$ und $\alpha_0 = 2$ (durchbrochene Linie), $\alpha = 1$ (durchgezogene Linie) und $\alpha = 0.5$ (punktierter Linie) mit ihren jeweiligen Wendepunkten.

Hefepilze (*Saccharomyces*, siehe Abbildung 21, links) werden bei der Herstellung von Bier und Wein verwendet. Sie fermentieren Stärke (im Fall von Bier) oder Zucker (im Fall von Wein) in Alkohol, wobei Kohlendioxid entsteht. Ihr Wachstum während des Gärungsprozesses folgt näherungsweise einer logistischen Wachstumskurve, weil einerseits der Stärke- bzw. Zuckergehalt während der Gärung abnimmt (Ressourcenbegrenzung) und andererseits der entstehende Alkohol das Hefewachstum sogar hemmt.

Die Abbildung 21, rechts zeigt experimentell ermittelte Wachstumsverläufe von Bierhefepilzen (punktierter Linien) in einem flüssigen Nährstoffmedium zu sieben unterschiedlichen Startpopulationen x_0 zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ (Beginn der experimentellen Messung) im Vergleich mit Lösungen eines Wachstumsmodells (durchgezogene Linien) der Form

$$x' = (a - b(x - x_0))x$$

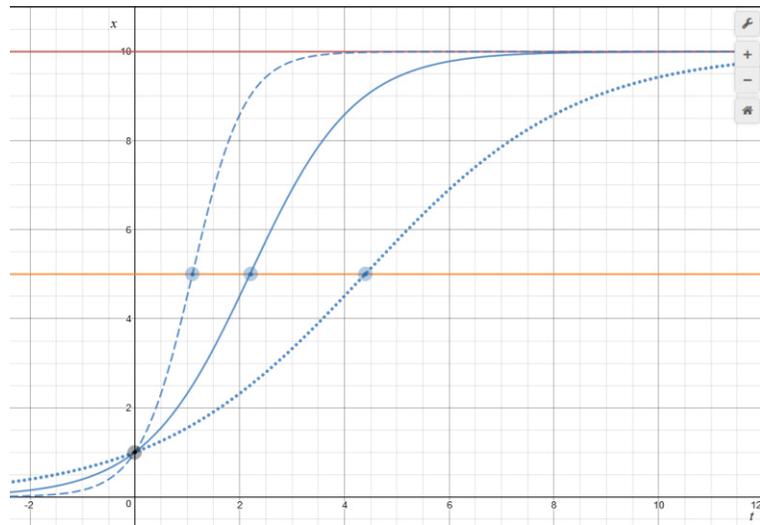


Abbildung 20: Logistische Wachstumskurven

mit gewissen Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Die Konstanten wurden mit der Methode der kleinsten Quadrate aus den vorliegenden Messungen geschätzt. Die Abbildung stammt aus dem Artikel [Tho].

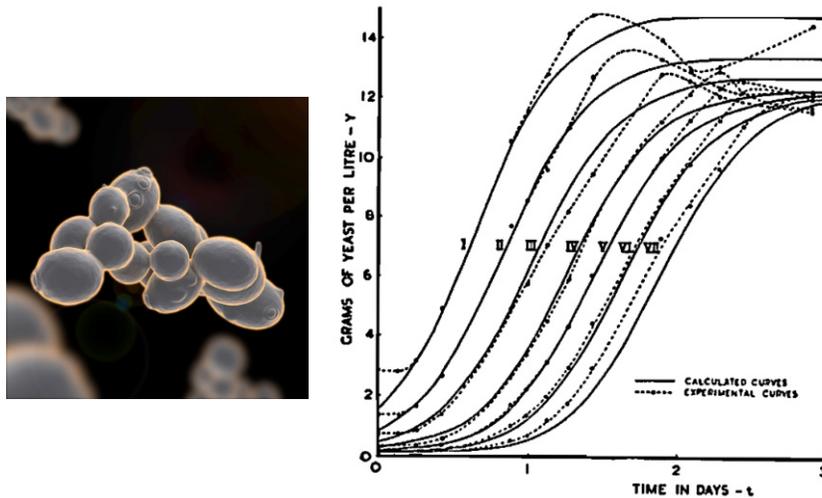


Abbildung 21: Modellierung des Wachstums von Hefepilzen

2.6 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Bislang wurden Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen diskutiert, mit deren Hilfe man explizite Formeln für die Lösungen angeben kann. Man spricht in diesem Fall auch von »analytischer Lösbarkeit« der betrachteten Differentialgleichung. Viele in der Anwendung vorkommenden gewöhnlichen Differentialgleichungen lassen sich allerdings nicht analytisch lösen. In diesem Fall muss ein numerisches Verfahren zur näherungsweise Lösung eingesetzt werden. Es ist jedoch auch dann wichtig zu wissen, ob Lösungen durch Anfangswerte eindeutig bestimmt sind: Es liegt in der Natur numerischer Verfahren, dass sie auf diese Frage keine definitive Antwort liefern können. Und natürlich ist es aus wissenschaftlicher Sicht interessant zu wissen welche Differentialgleichungen Lösungen besitzen und unter welchen Voraussetzungen diese eindeutig bestimmt sind.

Die Ausführungen in diesem Abschnitt sind durch die folgende Beobachtung motiviert: Man betrachte das AWP

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (41)$$

mit stetiger rechter Seite $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Da mit Hilfe von Differentialgleichungen häufig zeitliche Entwicklungen ab einem Zeitpunkt t_0 beschrieben werden, wird im Folgenden angenommen, dass der Definitionsbereich D die einfache »Streifenform«

$$D = [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}$$

besitzt. Es sei $x : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP, dann ist x stetig differenzierbar und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_{t_0}^t x'(\tau) d\tau = x(t) - x(t_0),$$

woraus sich die Gleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \quad (42)$$

ergibt.

Ist andererseits $x : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Gleichung (42) erfüllt, so löst x nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung das angegebene AWP.

Diese Tatsachen lassen sich durch Abstraktion elegant umformulieren: Man betrachte die Abbildung

$$T : C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}) \rightarrow C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}), x \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (43)$$

Dann gilt: x ist eine Lösung von (41) genau dann, wenn $T(x) = x$ gilt. Die Suche nach Lösungen des AWP ist also dasselbe wie die Suche nach Fixpunkten der Abbildung T , und hierzu kann der Banach'sche Fixpunktsatz benutzt werden.

RÜCKBLICK AUF METRISCHE RÄUME

Die folgenden Sachverhalte wurden in der Vorlesung »Mathematische Strukturen« behandelt.

- (1) Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer nicht leeren Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, genannt *Metrik*, die folgende Eigenschaften besitzt:

- $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
- $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x),$
- $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

- (2) Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt *konvergent*, falls es ein $x \in X$ mit der Eigenschaft

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{>0} \exists n \in \mathbb{N} \forall k > n \quad d(x_k, x) < \epsilon$$

gibt. Das dann eindeutig bestimmte Element x nennt man den *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt *Cauchyfolge*, falls gilt:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{>0} \exists n \in \mathbb{N} \forall k, \ell > n \quad d(x_k, x_\ell) < \epsilon$$

gibt.

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Ein metrischer Raum (X, d) , in dem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt *vollständig*.

- (3) Die durch $d_\infty(f, g) := \max(|f(t) - g(t)| : t \in [a, b])$ definierte Abbildung

$$d_\infty : C([a, b], \mathbb{R}) \times C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$

ist eine Metrik, die sogenannte *Maximumsmetrik*.

- (4) Eine konvergente Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $(C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ bezeichnet man auch als *gleichmäßig konvergente* Funktionenfolge. Diese Wortwahl wird dadurch motiviert, dass gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ genau dann vorliegt, wenn eine Funktion $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ existiert, für die

$$\forall \epsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall t \in [a, b] \quad |f_k(t) - f(t)| < \epsilon$$

gilt.

- (5) Eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *punktweise konvergent*, falls für jedes $t \in [a, b]$ die Folge $(f_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert. Der punktweise Grenzwert einer solchen Folge ist die Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t).$$

- (6) Eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist auch punktweise konvergent. Der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ in $(C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ stimmt mit dem punktweisen Grenzwert überein.

- (7) Der metrische Raum $(C([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ ist vollständig.

- (8) Eine Abbildung $\Phi : X \rightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt *dehnungsbeschränkt*, falls es eine Zahl $L > 0$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in X \quad d_Y(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L d_X(x, y)$$

gibt. Man nennt L eine *Dehnungsschranke* von Φ .

Eine (Selbst-)Abbildung $\Phi : X \rightarrow X$ des metrischen Raums (X, d) heißt *kontrahierend*, falls es eine Zahl $C \in [0, 1)$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in X \quad d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq C d(x, y)$$

gibt. Insbesondere ist Φ dehnungsbeschränkt.

- (9) **FIXPUNKTSATZ VON BANACH**⁶: *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\Phi : X \rightarrow X$ eine kontrahierende Abbildung. Dann konvergiert die Folge $(\Phi^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $x_0 \in X$ gegen denselben Grenzwert x^* und dieser Grenzwert ist der einzige Fixpunkt der Abbildung Φ .*

Ist $C \in [0, 1)$ eine Dehnungsschranke von Φ , so gilt die Fehlerabschätzung

$$d(\Phi^k(x_0), x^*) \leq \frac{C^k}{1 - C} d(\Phi(x_0), x_0).$$

Wie bereits ausgeführt kann man die Existenz von Lösungen des AWP (41) zurückführen auf die Existenz von Fixpunkten der Abbildung (43). Um hierzu den Satz von Banach einsetzen zu können, muss T kontrahierend sein. Die im Folgenden definierte Eigenschaft von Funktionen wird dies sicherstellen:

DEFINITION 2.24: *Die auf der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ definierte Funktion*

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t, x)$$

besitzt die Lipschitz-Eigenschaft⁷ bezüglich x , falls es eine Zahl $L \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in D \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

gibt. Jede Zahl L mit dieser Eigenschaft nennt man Lipschitz-Schranke für f bezüglich x .

Ist $D = I \times J$, so ist die Lipschitz-Eigenschaft von f bezüglich x äquivalent zur Dehnungsbeschränktheit der Funktionen $f(t, \cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}, t \in I$, mit einer gemeinsamen Dehnungsschranke L .

Die Menge der Funktionen mit Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x ist »groß«:

FESTSTELLUNG 2.25: *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und J ein Intervall. Die Funktion $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t, x)$ sei partiell nach x differenzierbar und für ein $L \geq 0$ gelte*

$$\forall (t, x) \in I \times J \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq L.$$

⁶Stefan Banach, 1892 – 1945, polnischer Mathematiker

⁷Rudolf Otto Sigmund Lipschitz, 1832 – 1903, russischer Mathematiker

Dann besitzt f die Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x mit der Lipschitz-Konstante L .

Insbesondere gilt: Ist $I \times J$ kompakt und $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig, so besitzt f die Lipschitz-Eigenschaft.

BEWEIS: Es seien $t \in I$ und $x_1, x_2 \in J$. Nach dem Mittelwertsatz angewandt auf die Funktion $f(t, \cdot)$ gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit der Eigenschaft

$$\frac{f(t, x_1) - f(t, x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi).$$

Übergang zum Betrag und Multiplikation mit dem Nenner liefert

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi) \right| |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Die zweite Behauptung in der Feststellung ergibt sich aus dem Satz vom Maximum angewandt auf die Funktion $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$. \square

Nun hat man alle Zutaten für die Formulierung und den Beweis eines zentralen Resultats über gewöhnliche Differentialgleichungen beisammen:

SATZ 2.26 (E. Picard⁸, E. Lindelöf⁹): *Die Funktion*

$$f : [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto f(t, x), \quad t_0 \in \mathbb{R}, a > 0,$$

sei stetig und besitze die Lipschitz-Eigenschaft bezüglich der Variablen x . Dann besitzt das AWP

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

genau eine Lösung. Diese ist im gesamten Intervall $[t_0, t_0 + a]$ definiert.

BEWEIS: Es wird eine Beweisskizze gegeben, in der einige technische Details ausgelassen sind.

(1) Die Abbildung (43)

$$T : C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}) \rightarrow C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R})$$

⁸Charles Emile Picard, 1856 – 1941, französischer Mathematiker

⁹Ernst Leonard Lindelöf, 1870 – 1946, finnischer Mathematiker

ist dehnungsbeschränkt mit der Dehnungsschranke aL : Für alle $x_1, x_2 \in C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R})$ und alle $t \in [t_0, t_0 + a]$ gilt

$$\begin{aligned} |T(x_1)(t) - T(x_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_1(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, x_2(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t L|x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \\ &\leq L(t - t_0)d_\infty(x_1, x_2), \end{aligned}$$

woraus

$$d_\infty(T(x_1), T(x_2)) \leq aLd_\infty(x_1, x_2), \quad (44)$$

folgt.

- (2) Falls $aL < 1$, ist die Aussage des Satzes richtig.

Denn: Ist $aL > 1$, so ist T eine kontrahierende Selbstabbildung des vollständigen metrischen Raums $(C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}), d_\infty)$ und besitzt damit nach dem Banach'schen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt x . Wie bereits gezeigt wurde korrespondieren die Fixpunkte von T mit den Lösungen des betrachteten AWP.

- (3) Man wähle $t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} := t_0 + a \in [t_0, t_0 + a]$, $t_1 > t_0$, so, dass für $k \in \{0, \dots, m\}$ die Ungleichung $L(t_{k+1} - t_k) < 1$ gilt.
- (4) Nach Punkt (2) sind für $k \in \{0, \dots, m\}$ und jeweils beliebiges $x_{k,0} \in \mathbb{R}$ die AWP

$$x' = f(t, x), \quad x(t_k) = x_{k,0}$$

im Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ eindeutig lösbar.

- (5) Es seien

- $x_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$,
- $x_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_1) = x_1(t_1)$,
- $x_3 : [t_2, t_3] \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_2) = x_2(t_2)$,
- usw.
- $x_{m+1} : [t_m, t_{m+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_m) = x_m(t_m)$.

Dann bildet die »zusammengestückelte« Funktion

$$x : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} x_1(t) & \text{falls } t \in [t_0, t_1] \\ x_2(t) & \text{falls } t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \\ x_{m+1}(t) & \text{falls } t \in [t_m, t_{m+1}] \end{cases}$$

eine Lösung des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.

- (6) Die Lösung ist eindeutig, da eine beliebige Lösung auf den Intervallen $[t_k, t_{k+1}]$ mit den Lösungen x_k übereinstimmen muss.

□

BEISPIEL 2.27 (PICARD-LINDELÖF-ITERATION): Die im Beweis des Satzes 2.26 verwendete Methode die Lösung eines AWP mittels des Banach'schen Fixpunktsatzes zu ermitteln, wird in diesem Beispiel konkret demonstriert.

Man betrachte das lineare AWP

$$x' = cx + t, x(0) = 1,$$

wobei $c \in (-1, 1)$ gelte. Die rechte Seite $f(t, x) = cx + t$ ist auf \mathbb{R}^2 definiert und es gilt $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |c| |x_1 - x_2|$. Folglich liegt die Lipschitz-Eigenschaft auf *jedem* Streifen $[t_0, a] \times \mathbb{R}$ vor, wobei die Lipschitz-Konstante kleiner 1, die Abbildung

$$T(x) = x_0 + \int_{t_0}^t cx(\tau) + \tau d\tau$$

also für alle $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ kontrahierend ist.

Wir beginnen die Fixpunktiteration mit $x_1(t) = 1$. Es folgt

$$x_2 = T(x_1) = 1 + \int_0^t c + \tau d\tau = 1 + ct + \frac{1}{2}t^2.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} x_3 = T(x_2) &= 1 + \int_0^t c(1 + c\tau + \frac{1}{2}\tau^2) + \tau d\tau \\ &= 1 + \int_0^t c + (c^2 + 1)\tau + c\frac{1}{2}\tau^2 d\tau \\ &= 1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + c\frac{1}{6}t^3. \end{aligned}$$

Wir berechnen noch

$$\begin{aligned}
x_4 = T(x_3) &= 1 + \int_0^t c(1 + c\tau + \frac{1}{2}(c^2 + 1)\tau^2 + c\frac{1}{6}\tau^3) + \tau \, d\tau \\
&= 1 + \int_0^t c + (c^2 + 1)\tau + \frac{1}{2}c(c^2 + 1)\tau^2 + \frac{1}{6}c^2\tau^3 \, d\tau \\
&= 1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + \frac{1}{6}c(c^2 + 1)\tau^3 + \frac{1}{24}c^2\tau^4.
\end{aligned}$$

Für $k \geq 4$ ergibt sich die Vermutung:

$$x_k = 1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + \sum_{i=3}^{k-1} \frac{1}{i!} c^{i-2}(c^2 + 1)t^i + \frac{1}{k!} c^{k-2} t^k.$$

Wie beweisen diese durch vollständige Induktion nach k mit dem bereits gezeigten Induktionsanfang bei $k = 4$. Der Induktionsschritt ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} = T(x_k) &= 1 + \int_0^t c(1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + \sum_{i=3}^{k-1} \frac{1}{i!} c^{i-2}(c^2 + 1)t^i + \frac{1}{k!} c^{k-2} t^k) + \tau \, d\tau \\
&= 1 + \int_0^t c + (c^2 + 1)\tau + \frac{1}{2}c(c^2 + 1)\tau^2 + \sum_{i=3}^{k-1} \frac{1}{i!} c^{i-1}(c^2 + 1)\tau^i + \frac{1}{k!} c^{k-1} \tau^k \, d\tau \\
&= 1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + \frac{1}{6}c(c^2 + 1)t^3 + \sum_{i=3}^{k-1} \frac{1}{(i+1)!} c^{i-1}(c^2 + 1)t^{i+1} + \frac{1}{(k+1)!} c^{k-1} t^{k+1} \\
&= 1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + \sum_{i=3}^k \frac{1}{i!} c^{i-2}(c^2 + 1)t^i + \frac{1}{(k+1)!} c^{k-1} t^{k+1},
\end{aligned}$$

wie behauptet.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz konvergiert die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Lösung x des AWP, folglich muss

$$\forall t \geq 0 \quad x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + \sum_{i=3}^k \frac{1}{i!} c^{i-2}(c^2 + 1)t^i + \frac{1}{(k+1)!} c^{k-1} t^{k+1}$$

gelten. Tatsächlich ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)!} c^{k-1} t^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k-1)!} (ct)^{k-1} \frac{t^2}{k(k+1)} = 0,$$

woraus sich

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i!} c^{i-2}(c^2 + 1)t^i \\
&= 1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + \frac{c^2+1}{c^2} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i!} c^i t^i \\
&= 1 + ct + \frac{1}{2}(c^2 + 1)t^2 + \frac{c^2+1}{c^2} (e^{ct} - 1 - ct - \frac{1}{2}c^2 t^2)
\end{aligned}$$

als Lösung ergibt. Diese Lösung hätte man auch durch Anwendung des Satzes 2.17 gewinnen können.

In Abbildung 22 sind die ersten vier Folgenglieder (rot, blau, orange, grün) und der Grenzwert (schwarz) der gerade betrachteten Iteration graphisch dargestellt. \diamond

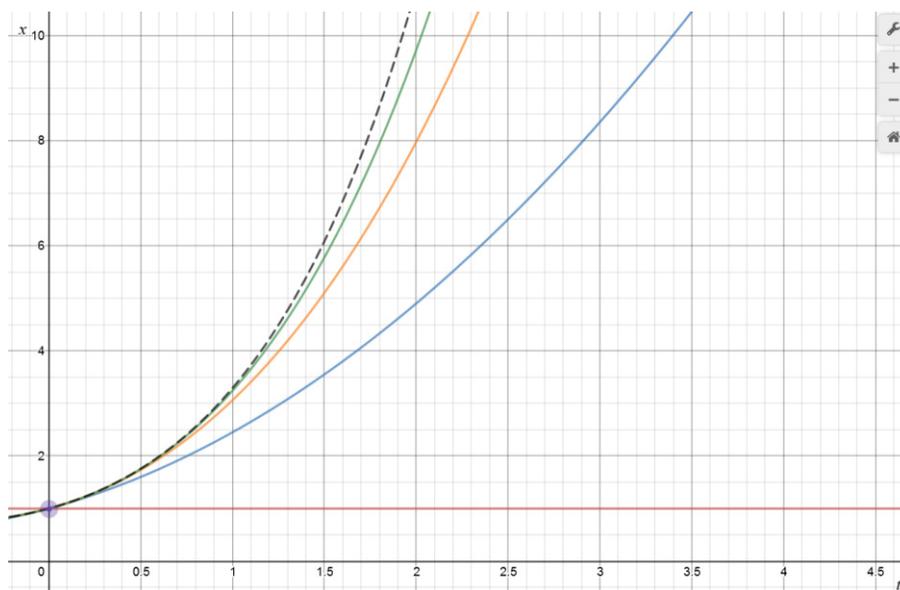


Abbildung 22: x_1, x_2, x_3, x_4 und Grenzwert aus Beispiel 2.27

Die Anforderungen an den Definitionsbereich im Satz 2.26 sind künstlich und unhandlich. Es gibt daher verschiedene weitere Varianten dieses Satzes. Zunächst gilt:

FESTSTELLUNG 2.28: *Der Satz 2.26 gilt sinngemäß auch für Funktionen*

$$f : [t_0 - a, t_0] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t, x), \quad t_0 \in \mathbb{R}, a > 0.$$

BEWEIS: Durch die Spiegelungsabbildung

$$S : [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R} \rightarrow [t_0 - a, t_0] \times \mathbb{R}, (t, x) \mapsto (2t_0 - t, x) =: (s, x)$$

führt man das AWP

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

in das AWP

$$y' = -f(s, y), \quad y(t_0) = x_0$$

über und wendet den Satz 2.26 auf dieses an. Die erhaltenen Lösungen können dann via der Umkehrabbildung S^{-1} von S in Lösungen des ursprünglichen AWP zurücktransformiert werden. \square

Die Funktion f auf der rechten Seite einer Differentialgleichung kann einen unregelmäßig geformten Wertebereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ besitzen. In dieser Situation kann man unter Umständen die folgende »Rechteck-Variante« des Satzes 2.26 einsetzen:

SATZ 2.29 (E. Picard, E. Lindelöf): *Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, sei stetig und besitze auf dem Rechteck*

$$R := [t_0, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subseteq D, \quad a, b > 0,$$

die Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x mit der Lipschitz-Konstante L .

Dann besitzt das AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ genau eine in R verlaufende Lösung und diese ist mindestens in dem Intervall

$$[t_0, t_0 + \min(a, \frac{b}{M})], \quad M := \max(|f(t, x)| : (t, x) \in R)$$

definiert.

Eine entsprechende Aussage gilt für links von (t_0, x_0) liegende Rechtecke.

BEWEIS: Man definiert eine Fortsetzung der Funktion f von dem Rechteck R auf den Streifen $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}$ durch die Setzung

$$\tilde{f}(t, x) := \begin{cases} f(t, x_0 + b) & \text{falls } x > x_0 + b, \\ f(t, x) & \text{falls } x \in [x_0 - b, x_0 + b], \\ f(t, x_0 - b) & \text{falls } x < x_0 - b. \end{cases}$$

Die Funktion \tilde{f} ist stetig und besitzt die Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x mit der Lipschitz-Konstante L . Nach Satz 2.26 besitzt das AWP

$$x' = \tilde{f}(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

daher eine eindeutige Lösung $x : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$. Für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$ mit der Eigenschaft $(t, x(t)) \in R$ gilt

$$|x'(t)| = |f(t, x(t))| \leq M.$$

Folglich verläuft der Graph der Lösung x in R zwischen den beiden Halbgeraden

$$h_1(t) := x_0 + M(t - t_0), \quad h_2(t) := x_0 - M(t - t_0), \quad t \geq t_0.$$

Diese Halbgeraden schneiden den Rand von R in den Punkten $(t_1, h_1(t_1))$ und $(t_2, h_2(t_2))$, wobei $h_1(t_1) = x_0 + b$ und $h_2(t_2) = x_0 - b$ gilt. Es folgt

$$t_1 = \frac{b}{M} + t_0 = t_2.$$

Also gilt $(t, x(t)) \in R$ für alle $t \in [t_0, \frac{b}{M} + t_0]$. □

Um die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ bei einer stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem Definitionsbereich von komplexerer Struktur zu beantworten, verfolgt man die in Abbildung 23 dargestellte Idee des Verklebens von lokalen Lösungen. Dabei stellen sich zwei möglicherweise miteinander zusammenhängende Fragen:

- Endet das Verfahren des Zusammenklebens lokaler Lösungen in dem Sinn, dass man eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ erhält, die sich nicht mehr auf ein echt größeres Intervall $J \supset I$ fortsetzen lässt?

Man beachte dabei, dass möglicherweise abzählbar unendlich viele lokale Lösungen miteinander verklebt werden, mit der Konsequenz, dass I nicht abgeschlossen ist.

- Erreicht eine durch Verkleben konstruierte Lösung x den Rand von D , falls dieser existiert?

Man beachte, dass D in jede Richtung unbeschränkt sein kann, in welchem Fall ein Rand nicht existiert.

Die erste Frage wird im Folgenden diskutiert und beantwortet, die zweite wird nicht behandelt.

DEFINITION 2.30: *Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \rightarrow f(t, x)$, besitzt die lokale Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x , falls zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in D$ eine offene Kugel $B((x_0, y_0), r)$, $r > 0$, existiert, sodass f auf der Menge $B((x_0, y_0), r) \cap D$ die Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x besitzt. (Die jeweilige Lipschitz-Schranke $L(t_0, x_0)$ kann von (t_0, x_0) abhängen.)*

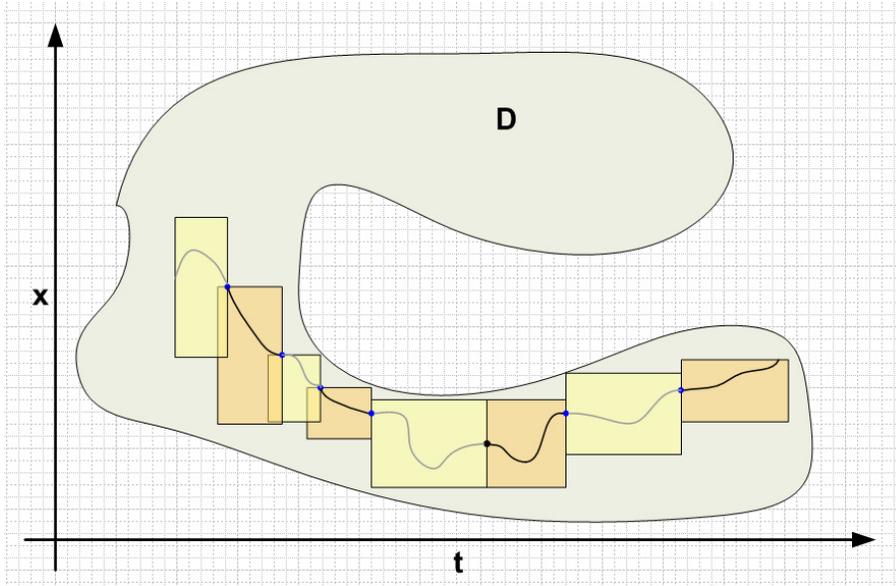


Abbildung 23: Verklebung lokaler Lösungen

Die lokale Lipschitz-Eigenschaft ist vergleichsweise schwach:

FESTSTELLUNG 2.31: Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ mit dem offenen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ besitze eine stetige partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}$, dann besitzt f die lokale Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x .

BEWEIS: Zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in D$ gibt es eine offene Kugel $B((t_0, x_0), r) \subseteq D$. In $B((t_0, x_0), r)$ liegt ein Rechteck $R := I \times J$, I, J abgeschlossene Intervalle, mit Mittelpunkt (t_0, x_0) . Da R kompakt ist, folgt die Behauptung aus Feststellung 2.25. \square

BEISPIEL 2.32: Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto t + \sqrt{x}$, besitzt nicht die Lipschitz-Eigenschaft wohl aber die lokale Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x . Denn es gilt einerseits

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty \quad (45)$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ und andererseits

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x_0 - r}}$$

in jeder offenen Kugel $B((t_0, x_0), r) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$ mit der Eigenschaft $x_0 > r$. Man beachte, dass man (t_0, x_0) innerhalb des Definitionsbereichs von f beliebig vorgeben kann.

Die Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto t + \sqrt{|x|}$ dagegen besitzt die lokale Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x nicht: Die Punkte $(t_0, 0)$ sind hier die Problemfälle, wie die Gleichung (45) zeigt. \diamond

DEFINITION 2.33: *Die Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, heißt nicht fortsetzbar, falls es keine Lösung $\tilde{x} : J \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die die Eigenschaften $J \supset I$ und $\tilde{x}|_I = x$ besitzt.*

SATZ 2.34 (E. Picard, E. Lindelöf): *Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, besitze einen offenen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und die lokale Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x . Dann besitzt jedes AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, eine nicht fortsetzbare Lösung $x : J \rightarrow \mathbb{R}$. Sie ist eindeutig bestimmt.*

BEWEIS: Es sei L die Menge aller Lösungen $x : I_x \rightarrow \mathbb{R}$ des in Rede stehenden AWP. Diese Menge ist nach Satz 2.29 nicht leer.

Für $x_1, x_2 \in L$ gilt $t_0 \in I_{x_1} \cap I_{x_2} =: I$ und I ist ein Intervall. Die Menge

$$G := \{t \in I : x_1(t) = x_2(t)\}$$

enthält den Punkt t_0 und ist wegen der Stetigkeit der x_i abgeschlossen in I . Ist $G \neq I$, so gibt es daher entweder ein $t_l \in G$ mit der Eigenschaft

$$(-\infty, t_l) \cap G = \emptyset \wedge (-\infty, t_l) \cap I \neq \emptyset$$

oder ein $t_r \in G$ mit der Eigenschaft

$$(t_r, \infty) \cap G = \emptyset \wedge (t_r, \infty) \cap I \neq \emptyset.$$

Im ersten Fall sind $x_1|_I$ und $x_2|_I$ Lösungen des AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_l) = x_1(t_l) = x_2(t_l)$. Nach Satz 2.29 besitzt dieses AWP aber in einem links von t_l liegenden Rechteck eine *eindeutige* Lösung, im Widerspruch zur Annahme über t_l . Analog kann man für t_r schließen und damit insgesamt zeigen, dass x_1 und x_2 auf I übereinstimmen.

Die Menge

$$J := \bigcup_{x \in L} I_x$$

ist ein Intervall und die Funktion

$$x : J \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x_I(t),$$

wobei $x_I : I \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Lösung $x_I \in L$ mit $t \in I$ ist, ist eine Lösung des AWP.

Die Lösung x ist nach Konstruktion nicht fortsetzbar.

Sie ist auch eindeutig bestimmt: Ist nämlich $y : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht fortsetzbare Lösung des AWP, so stimmen x und y auf $J \cap K$ nach dem bereits Bewiesenen überein, womit

$$z : J \cup K \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} x(t) & \text{falls } t \in J, \\ y(t) & \text{falls } t \in K, \end{cases}$$

eine Lösung des AWP also eine Fortsetzung von x ist. Es folgt $K \subseteq J$. Damit ist aber z eine Fortsetzung von y , also $J = K$ und damit $x = y$. \square

Das Vorliegen der lokalen Lipschitz-Bedingung ist für die Eindeutigkeit von Lösungen eines AWP notwendig wie das Beispiel 2.10 zusammen mit dem Beispiel 2.32 zeigt. Die Existenz von Lösungen ist aber auch ohne diese gesichert:

SATZ 2.35 (G. Peano): *Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und besitze einen offenen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann besitzt jedes AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, mindestens eine Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$.*

3 Lineare Differentialgleichungen

Bereits im Abschnitt 1.1 taucht unter den dort diskutierten einführenden Beispielen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung auf, nämlich die Differentialgleichung

$$mh''(t) + \rho h'(t) - mg = 0$$

für den freien Fall unter Berücksichtigung der Luftreibung. Die Lösung wurde durch systematisches Raten bestimmt. Im folgenden Abschnitt der Vorlesung wird für Differentialgleichungen, in denen wie im obigen Beispiel nur Linearkombinationen von Ableitungen der gesuchten Lösung auftreten, eine systematische Lösungstheorie entwickelt.

3.1 Grundlegendes

Im vorliegenden Abschnitt werden Differentialgleichungen und AWP des folgenden Typs studiert:

DEFINITION 3.1: *Eine lineare Differentialgleichung der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ ist eine Differentialgleichung der Form*

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b, \quad (46)$$

wobei $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I definierte Funktionen sind und $a_n \neq 0$ gilt.

Sind alle a_i konstant, so spricht man von einer linearen Differentialgleichung (der Ordnung n) mit konstanten Koeffizienten. Ist $b = 0$, so nennt man die Differentialgleichung homogen, sonst inhomogen.

Eine Lösung der Differentialgleichung (46) ist eine n -mal differenzierbare Funktion $x : J \rightarrow \mathbb{R}$, $J \subseteq I$, mit der Eigenschaft

$$\forall t \in J \quad a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t).$$

Ein Anfangswertproblem für die Differentialgleichung (46) ist eine Vorgabe

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

für ein $t_0 \in I$.

BEMERKUNGEN:

1. Beschränkt man die Untersuchung der Differentialgleichung jeweils auf Intervalle, in denen a_n keine Nullstellen besitzt, so kann man eine lineare Differentialgleichung der Ordnung n durch Division in die Form

$$x^{(n)} + b_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + b_1x' + b_0x = c,$$

bringen.

Wir beschränken uns im Weiteren auf die Betrachtung dieses Falls, das heißt im Folgenden sei stets $a_n = 1$.

2. Sind die Funktionen a_i und b stetig, so ist jede Lösung n mal stetig differenzierbar. Denn es gilt

$$x^{(n)} = b - (a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x),$$

wobei die rechte Seite eine stetige Funktion ist.

Sind die Funktionen a_i und b k mal (stetig) differenzierbar, so ist jede Lösung $n + k$ mal (stetig) differenzierbar.

Man beweist dies durch Induktion nach k : Im Fall $k = 1$ ist die rechte Seite der obigen Gleichung nach den Ableitungsregeln einmal (stetig) differenzierbar. Nimmt man an die a_i und b sind $k + 1$ mal (stetig) differenzierbar, so ist nach Induktionsannahme $x^{(n)}$ k mal (stetig) differenzierbar, womit alle Funktionen auf der rechten Seite $k + 1$ mal (stetig) differenzierbar sind.

Sind die Funktionen a_i und b unendlich oft differenzierbar, so ist jede Lösung unendlich oft differenzierbar. Insbesondere gilt dies im Fall konstanter Koeffizienten und unendlich oft differenzierbarem b .

Wie im Fall linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung lohnt es sich lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung aus dem Blickwinkel der linearen Algebra zu betrachten. Wie sich herausstellen wird, ist der Nutzen in diesem Fall sogar viel höher als im Fall 1. Ordnung: Es liege also eine Differentialgleichung (46) mit stetigen Koeffizientenfunktionen und stetiger rechter Seite vor und $J \subseteq I$ sei ein beliebiges Intervall mit mehr als einem Punkt, um triviale Fälle auszuschließen. Dann ist die Abbildung

$$L : C^n(J, \mathbb{R}) \rightarrow C(J, \mathbb{R}), x \mapsto a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x \quad (47)$$

eine lineare Abbildung, wie man unter Benutzung der Ableitungsregeln leicht nachrechnet; hierbei ist $C^n(J, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen. Die Differentialgleichung lässt sich dann wieder als Abbildungsgleichung

$$L(x) = b$$

interpretieren und wie im Fall linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung kommt man dann zu folgendem Ergebnis hinsichtlich der Struktur der Lösungsmenge:

FESTSTELLUNG 3.2: *Für die Lösungen einer Differentialgleichung (46) gilt:*

- *Homogener Fall ($b = 0$): Sind $x_1 : J \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen, so ist für beliebige Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ auch $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ ein Lösung. Mit anderen Worten: Die Menge $\mathbb{L}(J)$ der auf einem Intervall $J \subseteq I$ definierten Lösungen ist ein Untervektorraum von $C(J, \mathbb{R})$.*
- *Inhomogener Fall: Ist $x_s : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung von (46) und ist $\mathbb{L}_0(J)$ die Menge aller auf J definierten Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0,$$

so ist

$$\mathbb{L}(J) := x_s + \mathbb{L}_0(J)$$

die Menge aller auf J definierten Lösungen von (46).

Entsprechend obiger Feststellung werden wir im Folgenden in vier Schritten vorgehen:

1. Bestimmung der Lösungsmenge einer homogenen linearen DGL n -ter Ordnung.
2. Untersuchung von AWP's homogener linearer DGL n -ter Ordnung.
3. Bestimmung einer speziellen Lösung einer inhomogenen linearen DGL n -ter Ordnung.
4. Untersuchung von AWP's inhomogener linearer DGL n -ter Ordnung.

Die Untersuchung wird dabei aus Zeitgründen auf den Fall konstanter Koeffizientenfunktionen a_i beschränkt bleiben.

3.2 Homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten I

In diesem Abschnitt werden die Lösungen von Differentialgleichungen der Form

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \quad (48)$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ diskutiert. Wir wissen bereits, dass die Lösungen auf einem vorgegebenen Intervall I dann unendlich oft differenzierbar sind. Wir können im Weiteren also stets im Vektorraum $C^\infty(I, \mathbb{R})$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ arbeiten. Wie das Intervall I gewählt werden kann, ist zunächst nicht klar.

GRUNDLEGENDE BEOBACHTUNG: Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung lassen sich durch Exponentialfunktionen lösen. Wir versuchen unser Glück daher auch im vorliegenden Fall mit einer Funktion

$$x = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in (48) liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzt, folgt

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

das heißt λ ist eine reelle Nullstelle des Polynoms

$$p := X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0, \quad (49)$$

das man aus den Koeffizienten der Differentialgleichung gewinnt. Die obige Rechnung lässt sich umkehren und man erkennt dann: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Nullstelle des Polynoms (49), so ist $x = e^{\lambda t}$ tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung (48). Dies führt unmittelbar zu der Erkenntnis: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ die reellen Nullstellen des Polynoms (49), so gilt

$$\mathbb{R}e^{\lambda_1 t} + \dots + \mathbb{R}e^{\lambda_r t} \subseteq \mathbb{L}(I).$$

Es drängen sich dann die folgenden Fragen auf:

- Welche Rolle spielt die Vielfachheit einer Nullstelle λ von (49)?

- Welche Rolle spielen komplexe Nullstellen von (49)?

BEISPIEL 3.3: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, betrachten wir die homogene Differentialgleichung

$$x'' - (\alpha + \beta)x' + \alpha\beta x = 0$$

Das zugehörige Polynom (49) ist

$$X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta = (X - \alpha)(X - \beta).$$

Folglich liegen gemäß der grundlegenden Beobachtung alle Funktionen der Gestalt

$$x = \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$$

im Lösungsraum $\mathbb{L}(\mathbb{R})$.

Es sei nun $x \in \mathbb{L}(\mathbb{R})$ irgendeine Lösung. Dann gilt für die Funktion

$$x_1 := x' - \alpha x$$

die Gleichung

$$x_1' = x'' - \alpha x' = \beta x' - \alpha\beta x = \beta x_1.$$

Es folgt $x_1 = \mu e^{\beta t}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

Analog zeigt man, dass für die Funktion

$$x_2 := x' - \beta x$$

die Gleichung $x_2 = \lambda e^{\alpha t}$ gilt.

Nun gilt aber auch die Gleichung

$$x = -\frac{1}{\alpha - \beta}x_1 + \frac{1}{\alpha - \beta}x_2,$$

womit

$$x = -\frac{1}{\alpha - \beta}\mu e^{\beta t} + \frac{1}{\alpha - \beta}\lambda e^{\alpha t}$$

bewiesen wurde, das heißt es gilt

$$\mathbb{L}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}e^{\alpha t} + \mathbb{R}e^{\beta t}.$$

Man beachte, dass diese Aussage für $\alpha = \beta$ falsch ist: So besitzt etwa die homogene Differentialgleichung $x'' - 2x' + x = 0$ als zugehöriges Polynom $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ und tatsächlich ist $x_1 = e^t$ eine Lösung. Es ist aber auch die Funktion $x_2 = te^t$ eine Lösung. \diamond

Um die oben aufgeworfenen Fragen zu beantworten und schließlich zu einer vollständigen Beschreibung des Lösungsraums $\mathbb{L}(I)$ zu kommen, ist es nützlich das Ableiten von Funktionen als lineare Abbildung

$$\partial : C^\infty(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(I, \mathbb{R}), \quad x \mapsto x' \quad (50)$$

zu betrachten; man bezeichnet ∂ auch als *Differentialoperator*.

RECHNEN MIT DEM DIFFERENTIALOPERATOR

Wie bereits im Abschnitt 2.3 beschrieben, kann man mit linearen Abbildungen, die denselben Definitions- und Wertebereich besitzen, punktweise rechnen: man kann die punktweise Summe zweier solcher Abbildungen bilden, sowie punktweise mit einer reellen Zahl multiplizieren. In beiden Fällen erhält man wiederum eine lineare Abbildung. Weiter ist die Verkettung linearer Abbildungen ebenfalls linear. In der vorliegenden Situation kann man die gerade genannten Sachverhalte folgendermaßen zusammenfassen:

SATZ 3.4: *Es sei V ein reeller Vektorraum; im vorliegenden Fall ist $V = C^\infty(I, \mathbb{R})$. Dann bildet die Menge $\text{End}(V)$ der linearen Selbstabbildungen*

$$T : V \rightarrow V$$

einen reellen Vektorraum, wenn man die Addition zweier linearer Abbildungen T_1, T_2 und die skalare Multiplikation einer linearen Abbildung T mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ punktweise definiert:

$$(T_1 + T_2)(x) := T_1(x) + T_2(x), \quad (\lambda \cdot T)(x) := \lambda \cdot T(x).$$

Als weitere Rechenoperation trägt $\text{End}(C^\infty(I, \mathbb{K}))$ die Verkettung linearer Abbildungen:

$$(T_1 \circ T_2)(x) := T_1(T_2(x)).$$

Die drei vorhandenen Rechenoperationen sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2) \circ T &= (T_1 \circ T) + (T_2 \circ T), \\ T \circ (T_1 + T_2) &= (T \circ T_1) + (T \circ T_2), \\ (\lambda \cdot T_1) \circ T_2 &= T_1 \circ (\lambda \cdot T_2), \\ (\lambda \cdot T_1) \circ T_2 &= \lambda \cdot (T_1 \circ T_2) \end{aligned}$$

miteinander verwoben.

ZUM BEWEIS: Dieser besteht aus einem routinemäßigen Nachrechnen der Vektorraumaxiome und der weiteren im Satz behaupteten Gleichungen. Beispielhaft soll eine solche Rechnung im Fall der Beziehung

$$(T_1 + T_2) \circ T = (T_1 \circ T) + (T_2 \circ T)$$

durchgeführt werden. Es handelt sich um eine Gleichheit von Abbildungen, die folglich punktweise geprüft werden kann:

$$\begin{aligned} ((T_1 + T_2) \circ T)(x) &= (T_1 + T_2)(T(x)) \\ &= T_1(T(x)) + T_2(T(x)) \\ &= (T_1 \circ T)(x) + (T_2 \circ T)(x) \\ &= ((T_1 \circ T) + (T_2 \circ T))(x). \end{aligned}$$

□

Es ist $\partial \in \text{End}(C^\infty(I, \mathbb{R}))$ und man kann ∂ mehrfach mit sich selbst verketten:

$$\partial^k := \underbrace{\partial \circ \partial \circ \dots \circ \partial}_{k \text{ mal}},$$

wodurch man gerade das k -malige Ableiten als lineare Abbildung erhält. Mit Hilfe der in Satz 3.4 definierten Rechenoperationen für lineare Abbildungen lässt sich die lineare Abbildung L (47) und damit die Differentialgleichung (48) in der Form

$$(\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \dots + a_1\partial + a_0\text{id})(x) = 0 \quad (51)$$

schreiben. Man beachte, dass dabei die Definition

$$T^0 := \text{id},$$

insbesondere $\partial^0 = \text{id}$ verwendet wird. Diese wurde in der Vorlesung »Mathematische Strukturen« im Abschnitt über Potenzrechnen in Monoiden motiviert. Im vorliegenden Fall ist $(\text{End}(V), \circ)$ ein Monoid. Es leuchtet auch ein, dass 0-maliges Ableiten einer Funktion die Funktion selbst liefern sollte.

Der Ausdruck $\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \dots + a_1\partial + a_0\text{id}$ für die lineare Abbildung L entsteht also, indem man den Differentialoperator ∂ in das Polynom (49) einsetzt, wie man das von den Polynomfunktionen

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

der Analysis gewohnt ist. Hierbei werden die in der Abbildungsvorschrift auftretenden Rechenoperationen wie folgt interpretiert:

- das Potenzieren als mehrfaches Verketteten einer linearen Abbildung mit sich selbst,
- das Multiplizieren mit einer reellen Zahl als punktweise Multiplikation einer linearen Abbildung mit dieser Zahl,
- das Addieren als punktweise Addition linearer Abbildungen.

Es werden also genau die im Satz 3.4 beschriebenen Operationen für lineare Abbildungen genutzt und man kann nun folgende, etwas gewöhnungsbedürftige Aussage formulieren:

Ist V ein beliebiger reeller Vektorraum, so liefert jedes Polynom $g(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ eine Abbildung

$$g : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V), T \mapsto g(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_1 T + a_0 \text{id}. \quad (52)$$

Besitzt eine durch $g(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ gegebene Polynomfunktion eine Nullstelle λ , so kann man das Polynom g bekanntlich wie folgt faktorisieren:

$$g(X) = g_1(X)(X - \lambda);$$

mit einem Polynom $g_1 = X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \dots + b_1 X + b_0$ vom Grad $n - 1$. Wenn man skrupellos in diese Gleichung unter Benutzung der oben formulierten Regeln den Differentialoperator einsetzt, ergibt sich die Gleichung:

$$\partial^n + a_{n-1} \partial^{n-1} + \dots + a_1 \partial + a_0 \text{id} = (\partial^{n-1} + b_{n-2} \partial^{n-2} + \dots + b_1 \partial + b_0 \text{id}) \circ (\partial - \lambda \text{id}).$$

Die homogene Differentialgleichung

$$(\partial^n + a_{n-1} \partial^{n-1} + \dots + a_1 \partial + a_0 \text{id})(x) = 0$$

nimmt also die Form

$$((\partial^{n-1} + b_{n-2} \partial^{n-2} + \dots + b_1 \partial + b_0 \text{id}) \circ (\partial - \lambda \text{id}))(x) = 0$$

an, an der man unmittelbar ablesen kann, dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(\partial - \lambda \text{id})(x) = 0$$

auch Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind. Die obige Gleichung besitzt aber die Lösungen

$$x = ce^{\lambda t}, \quad c \in \mathbb{R},$$

entsprechend der grundlegenden Beobachtung.

Die Rechtfertigung für das skrupellose Rechnen mit Polynomgleichungen wird durch das folgende Resultat geliefert:

LEMMA 3.5: *Es sei V ein reeller Vektorraum und $T \in \text{End}(V)$. Weiter sei $g(X)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $g(X) = g_1(X)g_2(X)$ eine Zerlegung von $g(X)$ in zwei Faktoren. Dann gilt auch*

$$g(T) = g_1(T) \circ g_2(T).$$

Inbesondere sind die linearen Abbildungen $q_1(D)$ und $q_2(D)$ vertauschbar:

$$g_1(T) \circ g_2(T) = g_2(T) \circ g_1(T).$$

BEWEIS: Es gelte

$$g(X) = \sum_{k=0}^m b_k X^k = \left(\sum_{i=0}^{m_1} c_i X^i \right) \left(\sum_{j=0}^{m_2} d_j X^j \right) = g_1(X)g_2(X).$$

Einsetzen von T auf der rechten Seite liefert:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{m_1} c_i T^i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^{m_2} d_j T^j \right) &= \sum_{j=0}^{m_2} \left(\sum_{i=0}^{m_1} c_i T^i \right) \circ (d_j T^j) \\ &= \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{i=0}^{m_1} ((c_i T^i) \circ (d_j T^j)) \\ &= \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{i=0}^{m_1} c_i d_j (T^i \circ T^j) \\ &= \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{i=0}^{m_1} c_i d_j T^{i+j} \\ &= \sum_{k=0}^{m_1+m_2} \left(\sum_{i+j=k} c_i d_j \right) T^k \\ &= \sum_{k=0}^m b_k T^k, \end{aligned}$$

wobei die verschiedenen in Satz 3.4 aufgelisteten Rechenregeln verwendet wurden.

Die zweite Behauptung wird ähnlich (einfach) bewiesen. \square

Um einen Nutzen aus dem bislang Beobachteten zu ziehen, benötigen wir zwei fundamentale Resultate über Polynome:

SATZ 3.6: *Zwei Polynome $p(X)$ und $q(X)$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten besitzen genau dann keinen gemeinsamen Teiler von positivem Grad, wenn es Polynome $u(X)$ und $v(X)$ mit reellen beziehungsweise komplexen Koeffizienten gibt, für die*

$$u(X)p(X) + v(X)q(X) = 1$$

gilt.

BEWEIS: \Leftarrow : Ein gemeinsamer Teiler d der Polynome p und q ist offensichtlich auch ein Teiler des Polynoms $up + vq$ und damit von 1. Folglich ist d konstant.

\Rightarrow : Man betrachtet die Menge von Polynomen

$$\mathcal{A} := \{up + vq : u, v \text{ beliebige Polynome}\}.$$

Diese besitzt folgende leicht nachzurechnende Eigenschaften:

1. Für Polynome $s, t \in \mathcal{A}$ gilt $s + t \in \mathcal{A}$.
2. Für jedes Polynom s und jedes Polynom $t \in \mathcal{A}$ gilt $st \in \mathcal{A}$.

Es sei $f \in \mathcal{A} \setminus 0$ ein Polynom minimalen Grades in \mathcal{A} . Dann gilt

$$\mathcal{A} = \{uf : u \text{ beliebige Polynome}\}.$$

Die Inklusion \supseteq ist hier wegen Eigenschaft 2 klar. Sei andererseits $g \in \mathcal{A}$. Division mit Rest durch f liefert

$$g = g_1f + r$$

mit einem Rest r , der entweder gleich 0 ist oder $\text{grad}(r) < \text{grad}(f)$ erfüllt. Im ersten Fall ist $g \in \mathcal{A}$, wie behauptet. Im zweiten Fall folgt $r = g - g_1f \in \mathcal{A}$ aus Eigenschaft 1, ein Widerspruch zur Minimalität des Grades von f .

Da $p, q \in \mathcal{A}$, ist also f ein gemeinsamer Teiler von beiden Polynomen. Folglich besitzt f den Grad 0 und die Behauptung des Satzes ist bewiesen. \square

SATZ 3.7 (Fundamentalsatz der Algebra): *Jedes Polynom $p(X)$ mit komplexen Koeffizienten kann man in der Form*

$$p(X) = \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{e_k}$$

mit paarweise verschiedenen $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ und Exponenten $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$ schreiben. Die Zahlen α_k und Exponenten e_k sind dabei bis auf die Reihenfolge durch $p(X)$ eindeutig bestimmt.

Der Beweis dieses Satzes ist nicht einfach und erfolgt entgegen seinem Namen nicht mit algebraischen, sondern mit analytischen Methoden.

Der Fundamentalsatz hat auch Konsequenzen für die Faktorisierung von Polynomen $p(X)$ mit reellen Koeffizienten in Faktoren mit reellen Koeffizienten: Ist nämlich $z = a + bi \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(X)$, so ist die konjugierte Zahl $\bar{z} = a - bi$ ebenfalls eine Nullstelle von $p(X)$, wie man unter Nutzung der Eigenschaften

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

direkt nachprüft. Der Fundamentalsatz der Algebra besitzt also die »reelle« Konsequenz:

KOROLLAR 3.8: *Jedes Polynom $p(X)$ mit reellen Koeffizienten kann in der Form*

$$p(X) = \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{e_k} \prod_{\ell=1}^s q_\ell(X)^{f_\ell}$$

mit paarweise verschiedenen $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, paarweise verschiedenen quadratischen Polynomen $q_1(X), \dots, q_s(X)$ ohne reelle Nullstellen und Exponenten $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s \in \mathbb{N}$ geschrieben werden. Die Zahlen α_k , Polynome $q_\ell(X)$ und Exponenten e_k, f_ℓ sind dabei bis auf die Reihenfolge durch $p(X)$ eindeutig bestimmt.

BEWEIS: Es genügt festzustellen, dass für jede komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ das Polynom

$$(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha}$$

reelle Koeffizienten besitzt. □

Mit den bislang gesammelten Erkenntnissen lassen sich viele homogene lineare Differentialgleichungen bereits vollständig lösen. Das Polynom (49) spielt dabei wie erwartet eine zentrale Rolle, weswegen es eine besondere Bezeichnung bekommt:

DEFINITION 3.9: *Das Polynom*

$$p(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

zu der Differentialgleichung (48) wird als charakteristisches Polynom der Differentialgleichung bezeichnet.

DER FALL REELLER NULLSTELLEN

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Nullstelle der Vielfachheit $e \in \mathbb{N}$ des charakteristischen Polynoms $p(X)$ der Differentialgleichung (48). Dann kann man $p(X)$ als

$$p(X) = q(X)(X - \alpha)^e$$

faktorisieren, wobei $q(X)$ und $(X - \alpha)^e$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Die Differentialgleichung

$$p(\partial)(x) = 0$$

lässt sich also nach Lemma 3.5 in der Form

$$(q(\partial) \circ (\partial - \alpha \text{id})^e)(x) = 0$$

oder in der Form

$$((\partial - \alpha \text{id})^e \circ q(\partial))(x) = 0$$

schreiben. Hieraus folgt: Ist $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(\partial - \alpha \text{id})^e(x) = 0$$

und ist $x_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$q(\partial)(x) = 0$$

so sind x_1 und x_2 Lösungen der Differentialgleichung

$$p(\partial)(x) = 0,$$

und damit auch alle Linearkombinationen $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Diese Situation wird mit dem nächsten Resultat noch präzisiert:

SATZ 3.10: Es sei $p(X) = p_1(X)p_2(X)$ eine Zerlegung des charakteristischen Polynoms $p(X)$ der Differentialgleichung (48) in teilerfremde Polynome. Dann lässt sich jede Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (48) in der Gestalt

$$x = x_1 + x_2$$

schreiben, wobei $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $p_i(\partial)(x) = 0$ ist.

Insbesondere gilt für die Lösungsmenge $\mathbb{L}(I)$ von (48) die Gleichung

$$\mathbb{L}(I) = \mathbb{L}_1(I) + \mathbb{L}_2(I),$$

wobei $\mathbb{L}_i(I)$ die Lösungsmenge von $p_i(\partial)(x) = 0$ ist.

BEWEIS: Nach Lemma 3.5 lässt sich die Differentialgleichung $p(\partial)(x) = 0$ in der Form

$$(p_1(\partial) \circ p_2(\partial))(x) = 0$$

schreiben. Für eine Lösung $x_2 \in \mathbb{L}_2(I)$ folgt daher

$$p(\partial)(x_2) = p_1(\partial)(p_2(\partial)(x_2)) = p_1(\partial)(0) = 0,$$

womit $\mathbb{L}_2(I) \subseteq \mathbb{L}(I)$ gezeigt ist. Wegen der Vertauschbarkeit der linearen Abbildungen $p_1(\partial)$ und $p_2(\partial)$ ergibt sich die Inklusion $\mathbb{L}_1(I) \subseteq \mathbb{L}(I)$ analog.

Aus der Linearität der Differentialgleichung $p(\partial)(x) = 0$ folgt nun

$$\mathbb{L}(I) \supseteq \mathbb{L}_1(I) + \mathbb{L}_2(I).$$

Um zu zeigen, dass sich jede Lösung $x \in \mathbb{L}(I)$ in der beschriebenen Weise als Summe darstellen lässt, benutzt man den Satz 3.6: Es existieren Polynome $u(X), v(X)$ mit der Eigenschaft

$$p_1(X)u(X) + p_2(X)v(X) = 1.$$

Hieraus erhält man durch Einsetzen

$$p_1(\partial)u(\partial) + p_2(\partial)v(\partial) = \text{id},$$

woraus

$$(p_1(\partial) \circ u(\partial))(x) + (p_2(\partial) \circ v(\partial))(x) =: x_2 + x_1 = x$$

für jede beliebige Funktion $x \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ folgt. Für $x \in \mathbb{L}(I)$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
 p_2(\partial)(x_2) &= p_2(\partial)(p_1(\partial) \circ u(\partial))(x) \\
 &= (p_2(\partial) \circ p_1(\partial) \circ u(\partial))(x) \\
 &= (u(\partial) \circ p_1(\partial) \circ p_2(\partial))(x) \\
 &= (u(\partial) \circ p(\partial))(x) \\
 &= u(\partial)(p(\partial)(x)) \\
 &= u(\partial)(0) = 0.
 \end{aligned}$$

Folglich ist $x_2 \in \mathbb{L}_2(I)$. Analog zeigt man $x_1 \in \mathbb{L}_1(I)$. □

Betrachtet man den Satz 3.10 in Kombination mit dem Korollar 3.8 zum Fundamentalsatz der Algebra, so ist klar, dass wir uns als Nächstes mit der Lösung von Differentialgleichungen des Typs

$$(\partial - \alpha \text{id})^e(x) = 0$$

auseinandersetzen müssen. Hierbei ist das folgende Resultat von zentraler Bedeutung:

FESTSTELLUNG 3.11: *Der Differentialoperator ∂ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

1. $\forall m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (\partial + \alpha \text{id})^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^{m-k} \partial^k.$
2. *Für m -mal differenzierbare Funktionen $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt*

$$\partial^m(fg) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \partial^k(f) \partial^{m-k}(g).$$

BEWEIS: Zu 1.: Man beweist die Aussage durch vollständige Induktion nach m ; der Induktionsanfang bei $m = 1$ ist trivial.

Zum Induktionsschluss: Es gilt

$$\begin{aligned}
 (\partial + \alpha \text{id})^{m+1} &= (\partial + \alpha \text{id}) \circ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^{m-k} \partial^k \\
 &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^{m-k} \partial^{k+1} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^{m-k+1} \partial^k \\
 &= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} \alpha^{m-k+1} \partial^k + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^{m-k+1} \partial^k \\
 &= \binom{m+1}{0} \alpha^{m+1} \partial^0 + \sum_{k=1}^m (\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}) \alpha^{m-k+1} \partial^k + \binom{m+1}{m+1} \alpha^0 \partial^{m+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \alpha^{m-k} \partial^k.
 \end{aligned}$$

Zu 2.: Diese Formel beweist man völlig analog zur ersten Formel, wobei für den Induktionsschluss die Produktregel für das Differenzieren verwendet wird. \square

SATZ 3.12: *Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $e \in \mathbb{N}$. Dann ist jede Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung*

$$(\partial - \alpha \text{id})^e(x) = 0$$

auf \mathbb{R} fortsetzbar und für die Lösungsmenge $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ gilt:

1. $\mathbb{L}(\mathbb{R}) = \left\{ \sum_{k=0}^{e-1} \lambda_k t^k e^{\alpha t} : \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$.
2. Die Funktionen $t^k e^{\alpha t}$, $k = 0, \dots, e-1$, sind linear unabhängig über \mathbb{R} .

BEWEIS: Zu 1.: Nach Punkt 1 von Feststellung 3.11 gilt

$$\begin{aligned} (\partial - \alpha \text{id})^e &= \sum_{k=0}^e \binom{e}{k} \partial^k \circ (-\alpha \text{id})^{e-k} \\ &= \sum_{k=0}^e \binom{e}{k} \partial^k \circ (-\alpha)^{e-k} \text{id} \\ &= \sum_{k=0}^e \binom{e}{k} (-\alpha)^{e-k} \partial^k. \end{aligned}$$

Also folgt für ein beliebiges $x \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ nach Punkt 2 von Feststellung 3.11:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} (\partial - \alpha \text{id})^e(x) &= \sum_{k=0}^e \binom{e}{k} (-\alpha)^{e-k} e^{-\alpha t} \partial^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^e \binom{e}{k} \partial^{e-k} (e^{-\alpha t}) \partial^k(x) \\ &= \partial^e (e^{-\alpha t} x). \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion $e^{-\alpha t}$ keine Nullstellen besitzt, folgt

$$\mathbb{L}(I) = \{x \in C^\infty(I, \mathbb{R}) : \partial^e (e^{-\alpha t} x) = 0\}.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung $\partial^e(y) = 0$ sind andererseits genau die Polynomfunktionen $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vom Grad kleiner als e . Hieraus folgt die erste Behauptung in Punkt 1, sowie die Behauptung zur Fortsetzbarkeit von Lösungen.

Zu 2.: Um die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $t^k e^{\alpha t}$ zu zeigen sei also

$$\sum_{k=0}^{e-1} \lambda_k t^k e^{\alpha t} = 0.$$

Es folgt

$$\sum_{k=0}^{e-1} \lambda_k t^k = 0,$$

da $e^{\alpha t}$ keine Nullstellen besitzt. Hieraus ergibt sich $\lambda_k = 0$ für alle k , da ein Polynom endlich viele Nullstellen besitzt. \square

Wir sind nun in der Lage ein wichtiges Teilresultat über das Lösungsverhalten von linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung zu formulieren:

SATZ 3.13: *Für das charakteristische Polynom $p(X)$ der homogenen Differentialgleichung (48) gelte*

$$p(X) = \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{e_k} q(X)$$

mit paarweise verschiedenen $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ und einem Polynom $q(X)$ ohne reelle Nullstellen. Dann besitzt jede Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Gestalt

$$x = x_1 + \sum_{k=1}^r p_k(t) e^{\alpha_k t},$$

wobei p_k ein Polynom vom Grad höchstens gleich $e_k - 1$ und x_1 eine Lösung der Differentialgleichung $q(\partial)(x) = 0$ ist.

Ist $q = 1$, so sind die Polynome p_k durch x eindeutig bestimmt.

BEWEIS: Man wende die Sätze 3.10 und 3.12 iteriert auf die Differentialgleichungen

$$\left(\prod_{k=1}^{\ell} (\partial - \alpha_k \text{id})^{e_k} \circ q(\partial) \right) (x) = 0, \quad \ell = r, \dots, 1,$$

an. Dies ist möglich, weil die Polynome

$$\prod_{k=1}^{\ell-1} (X - \alpha_k)^{e_k} q(X) \quad \text{und} \quad (X - \alpha_{\ell})^{e_{\ell}}$$

teilerfremd sind. Die Eindeutigkeit der Polynome p_k folgt aus Punkt 2 von Satz 3.12. \square

BEISPIEL 3.14: Die Differentialgleichung

$$x^{(3)} - x' = 0$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^3 - X = X(X^2 - 1) = X(X + 1)(X - 1).$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung der Notation des Satzes 3.13: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$ und $\alpha_3 = 1$, wobei $e_1 = e_2 = e_3 = 1$ gilt. Die Lösungen der Differentialgleichung sind also

$$x(t) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-t} + \lambda_3 e^t, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Die Differentialgleichung

$$x^{(3)} + 5x'' + 3x' - 9x = 0$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^3 + 5X^2 + 3X - 9 = (X + 3)^2(X - 1).$$

Hieraus ergibt sich $\alpha_1 = -3$ und $\alpha_2 = 1$, wobei $e_1 = 2$ und $e_2 = 1$ gilt. Die Lösungen sind also

$$x(t) = \lambda_1 e^{-3t} + \lambda_2 t e^{-3t} + \lambda_3 e^t = (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{-3t} + \lambda_3 e^t, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

\diamond

3.3 Komplexwertige Lösungsfunktionen

Wir wenden uns nun dem Fall zu, in dem $p(X)$ keine reellen Nullstellen besitzt. In diesem Fall ist es nützlich mit komplexwertigen Funktionen

$$f : I \rightarrow \mathbb{C}$$

einer reellen Variablen zu arbeiten; für den Definitionsbereich von f gilt also nach wie vor $I \subseteq \mathbb{R}$. Die Strategie ein Problem aus dem Bereich der reellen Zahlen zu behandeln, indem man es zunächst in die komplexen Zahlen verallgemeinert, tritt an vielen Stellen in der Mathematik in Erscheinung.

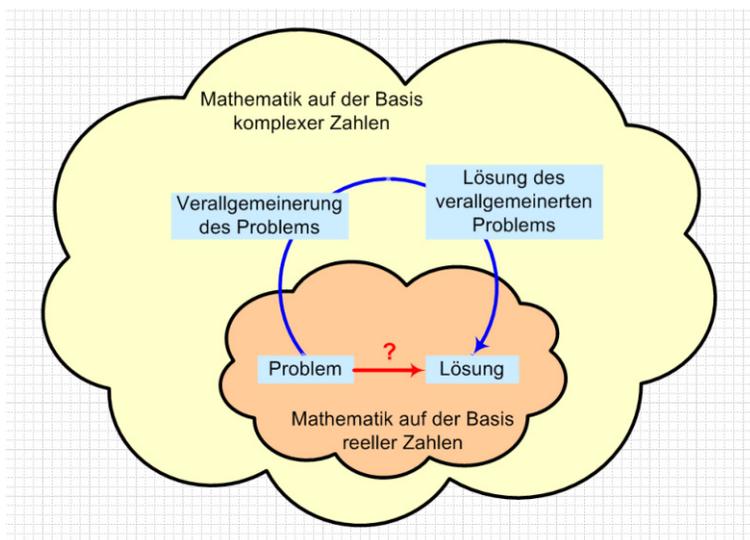


Abbildung 24: »Komplexifizierung«

KOMPLEXWERTIGE FUNKTIONEN EINER REELLEN VARIABLEN

Zunächst sei daran erinnert, dass man jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ in eindeutiger Weise in Real- und Imaginärteil zerlegen kann:

$$z = x_1 + ix_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1.$$

Die Zahl x_1 nennt man den auch als $\operatorname{Re}(z)$ geschriebenen Realteil, die Zahl x_2 den mit $\operatorname{Im}(z)$ bezeichneten Imaginärteil von z . Daher kann man über die bijektive Abbildung

$$\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad z = x_1 + ix_2 \mapsto x = (x_1, x_2),$$

komplexe Zahlen als Punkte in der Ebene auffassen. Bei dieser Auffassung bleibt sogar der Abstand zwischen komplexen Zahlen erhalten: Dieser ist wie im reellen über eine Betragsfunktion definiert, nämlich

$$|x_1 + ix_2| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Offensichtlich ist der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl nichts anderes als der euklidische Abstand $\|(x_1, x_2)\|$ des Punktes $\iota(z)$ vom Ursprung.

Jeder komplexwertigen Funktion einer reellen Variablen

$$f : I \rightarrow \mathbb{C}, \quad I \subseteq \mathbb{R},$$

lässt sich eine Real- und eine Imaginärteilmfunktion zuordnen, nämlich:

$$\operatorname{Re}(f) : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \operatorname{Re}(f(t))$$

und

$$\operatorname{Im}(f) : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \operatorname{Im}(f(t)).$$

Diese beiden Funktionen legen f eindeutig fest, denn es gilt

$$f(t) = \operatorname{Re}(f(t)) + i\operatorname{Im}(f(t)) = \operatorname{Re}(f)(t) + i\operatorname{Im}(f)(t).$$

Benutzt man die Auffassung von komplexen Zahlen als Punkte der euklidischen Ebene, so kann man also jede komplexwertige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ als Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ auffassen, nämlich durch

$$(\iota \circ f)(t) = (\operatorname{Re}(f)(t), \operatorname{Im}(f)(t))^T.$$

Diese Betrachtungsweise ermöglicht es Begriffe aus der Analysis-Vorlesung wie etwa Konvergenz, Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit direkt auf \mathbb{C} beziehungsweise auf komplexwertige Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ zu übertragen.

Zunächst kann man sich eine geometrische Vorstellung einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ machen, indem man die Bildmenge $f(I)$ betrachtet. Im Falle »schöner« zum Beispiel stetig differenzierbarer Funktionen ist diese Menge eine ebene Kurve.

BEISPIEL 3.15: Die Funktion

$$f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \ln(t) \cos(t) + i \ln(t) \sin(t)$$

besitzt als Bildmenge $f([1, \infty))$ die in Abbildung 25 dargestellte so genannte »logarithmische Spirale«.

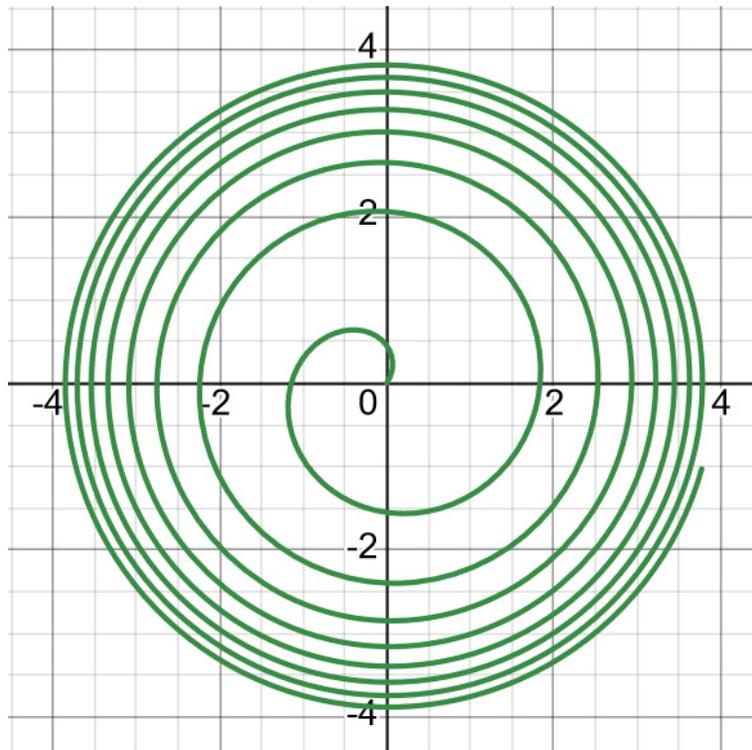


Abbildung 25: Logarithmische Spirale

Bemerkung: Auch wenn das in der Grafik einen anderen Eindruck macht: Auf der Spirale liegen Punkte in beliebigem positiven Abstand zum Ursprung. \diamond

Völlig analog zum Fall der Menge der reellwertigen Funktionen $\text{Fun}(I, \mathbb{R})$ und mit gleichem Beweis gilt:

FESTSTELLUNG 3.16: *Die Menge $\text{Fun}(I, \mathbb{C})$ der komplexwertigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ bildet zusammen mit der punktweisen Addition und der punktweisen skalaren Multiplikation einen Vektorraum über dem Körper \mathbb{C} .*

Die folgende Tatsache ist zwar unmittelbar einleuchtend aber nützlich im Zusammenhang mit dem vorliegenden Ziel Lösungen von linearen Differentialgleichungen zu komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu bestimmen:

FESTSTELLUNG 3.17: Die Inklusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ liefert eine Inklusion $\text{Fun}(I, \mathbb{R}) \subset \text{Fun}(I, \mathbb{C})$. Weiter ist $\text{Fun}(I, \mathbb{C})$ ein reeller Vektorraum und $\text{Fun}(I, \mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum hiervon.

Nachdem die grundlegenden algebraischen Eigenschaften komplexwertiger Funktionen beschrieben sind, wendet man sich ihrer Analysis zu. Hier ist zunächst natürlich der Stetigkeitsbegriff wichtig:

DEFINITION 3.18: Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ heißt stetig im Punkt $t_0 \in I$, falls für jede gegen t_0 konvergente Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen die komplexe Folge $(f(t_k))_{k \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte gegen $f(t_0)$ konvergiert:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0).$$

Es folgt dann:

FESTSTELLUNG 3.19: Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, ist genau dann (im Punkt t_0) stetig, wenn die beiden Funktionen $\text{Re}(f)$ und $\text{Im}(f)$ (im Punkt t_0) stetig sind.

Wie im Reellen gilt daher:

FESTSTELLUNG 3.20: Die Menge $C(I, \mathbb{C})$ der stetigen, komplexwertigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ bildet einen Untervektorraum von $\text{Fun}(I, \mathbb{C})$.

BEWEIS: Es seien f und g stetige Funktionen. Dann sind die reellwertigen Funktionen $\text{Re}(f)$, $\text{Re}(g)$, $\text{Im}(f)$ und $\text{Im}(g)$ nach Feststellung 3.19 stetig. Es gilt

$$\text{Re}(f + g) = \text{Re}(f) + \text{Re}(g), \quad \text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g).$$

Daher sind $\text{Re}(f + g)$ und $\text{Im}(f + g)$ stetig, womit erneut nach Feststellung 3.19 die Funktion $f + g$ stetig ist.

Für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ beweist man die Stetigkeit von λf durch Ausnutzen der Gleichung

$$\text{Re}(\lambda f) = \text{Re}(\lambda)\text{Re}(f) - \text{Im}(\lambda)\text{Im}(f)$$

und

$$\text{Im}(\lambda f) = \text{Im}(\lambda)\text{Re}(f) + \text{Re}(\lambda)\text{Im}(f).$$

□

Die Differenzierbarkeit von Funktionen $f \in \text{Fun}(I, \mathbb{C})$ kann ebenfalls wörtlich aus dem Reellen übertragen werden:

DEFINITION 3.21: Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ heißt differenzierbar in $t_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existiert.

Mit Hilfe der Abbildung ι kann man die Differenzierbarkeit von f auf die Differenzierbarkeit von $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ zurückführen. Insbesondere ergeben sich folgende Eigenschaften des Differenzierbarkeitsbegriffs:

FESTSTELLUNG 3.22: 1. Eine komplexwertige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ einer reellen Variablen ist genau dann differenzierbar (im Punkt t_0), wenn die beiden reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ (im Punkt t_0) differenzierbar sind. Für die Ableitung gilt dann

$$f'(t) = \operatorname{Re}(f)'(t) + i\operatorname{Im}(f)'(t).$$

2. Für das Differenzieren komplexwertiger Funktionen gelten dieselben Regeln wie für reellwertige Funktionen.
3. Die Menge der n -mal stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen $C^{(n)}(I, \mathbb{C})$, sowie die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $C^\infty(I, \mathbb{C})$ bilden Untervektorräume von $C(I, \mathbb{C})$.
4. $C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ ein reeller Untervektorraum von $C^{(n)}(I, \mathbb{C})$ und $C^\infty(I, \mathbb{R})$ ist ein reeller Untervektorraum von $C^\infty(I, \mathbb{C})$.

DIE KOMPLEXE EXPONENTIALFUNKTION

Die bisherigen Ergebnisse zu den Lösungen linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten zeigen bereits die besondere Rolle der Exponentialfunktion in diesem Zusammenhang: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms einer solchen Differentialgleichung, so ist die Funktion $e^{\alpha t}$ eine Lösung. Dieses und die damit zusammenhängenden Resultate lassen sich auf komplexe Nullstellen verallgemeinern. Man benötigt dazu allerdings eine komplexe Verallgemeinerung der Exponentialfunktion.

SATZ 3.23: Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut.

BEWEIS: Aus der reellen Analysis ist bekannt, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{k!} z^k \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k$$

konvergiert, nämlich gegen $e^{|z|}$. □

Dieses Resultat erlaubt bereits die Definition der komplexen Exponentialfunktion als

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k. \quad (53)$$

Ihre wichtigsten Eigenschaften sind in dem folgenden Resultat zusammengefasst:

SATZ 3.24: Für die komplexe Exponentialfunktion gilt:

1. e^z ist eine Fortsetzung der reellen Exponentialfunktion.
2. Funktionalgleichung: $\forall w, z \in \mathbb{C} \quad e^{w+z} = e^w e^z$.
3. Formel von de Moivre¹⁰: $e^{x_1+ix_2} = e^{x_1} \cos(x_2) + ie^{x_1} \sin(x_2)$.

BEWEIS: Der Punkt 1 ist nach Definition der komplexen Exponentialfunktion klar.

Der Punkt 2 wird wie für die reelle Exponentialfunktion durch Einsetzen des binomischen Satzes in die Potenzreihe bewiesen.

Zu Punkt 3: Punkt 2 liefert

$$e^{x_1+ix_2} = e^{x_1} e^{ix_2},$$

sodass nur der Fall eines rein imaginären Exponenten betrachtet werden muss. Hier gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} (ix)^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} (ix)^{2j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} (-1)^j x^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} i(-1)^j x^{2j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} (-1)^j x^{2j} + i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} (-1)^j x^{2j+1} \\ &= \cos(x) + i \sin(x). \end{aligned}$$

¹⁰Abraham de Moivre, 1667 – 1754, französischer Mathematiker

□

Für die Anwendung in der Lösungstheorie linearer Differentialgleichungen werden die Funktionen

$$e_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{\alpha t}$$

für $\alpha \in \mathbb{C}$ benötigt. Ist $\alpha = a + ib$ so gilt nach Satz 3.24, Punkt 2:

$$\operatorname{Re}(e_\alpha) = e^{at} \cos(bt), \operatorname{Im}(e_\alpha) = e^{at} \sin(bt).$$

Feststellung 3.22, Punkt 1 liefert daher $e_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Weiter erhält man für ihre erste Ableitung

$$\begin{aligned} (e^{\alpha t})' &= e^{at} \cos(bt) + i e^{at} \sin(bt) \\ &= a e^{at} \cos(bt) - b e^{at} \sin(bt) + i(a e^{at} \sin(bt) + b e^{at} \cos(bt)) \\ &= (a + bi)(e^{at} \cos(bt) + i e^{at} \sin(bt)) \\ &= \alpha e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Dieses Verhalten ist wie im Reellen charakteristisch:

FESTSTELLUNG 3.25: *Die einzigen differenzierbaren Funktionen $x : I \rightarrow \mathbb{C}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, mit der Eigenschaft $x' = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{C}$, sind die Funktionen $\lambda e^{\alpha t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

BEWEIS: Es wurde bereits bewiesen, dass $(e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t}$ gilt. Es gelte nun $x' = \alpha x$ für $x : I \rightarrow \mathbb{C}$, dann erhält man

$$(e^{-\alpha t} x)' = -\alpha e^{-\alpha t} x + e^{-\alpha t} x' = 0,$$

womit die Funktion $e^{-\alpha t} x$ konstant und damit $x = \lambda e^{\alpha t}$ ist. Beim letzten logischen Schluss wendet man den Mittelwertsatz auf Real- und Imaginärteil der Funktion $e^{-\alpha t} x$ an. □

VERALLGEMEINERUNG GRUNDLEGENDER RESULTATE INS KOMPLEXE

Man kann nun direkt eine ganze Reihe von Verallgemeinerungen reeller Resultate ins Komplexe vornehmen. Die Beweise für diese Verallgemeinerungen erfolgen entweder völlig analog zum reellen Fall oder es handelt sich um einfache Rechnungen unter Benutzung der Rechenregeln für komplexe Zahlen. Um ein gutes Verständnis der Sachverhalte zu gewinnen, ist es dennoch empfehlenswert sich die Richtigkeit der Verallgemeinerungen im Detail klarzumachen.

K.0 Es ist sinnvoll von linearen, homogenen Differentialgleichungen

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \quad (54)$$

mit komplexen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und deren Lösungen $x : I \rightarrow \mathbb{C}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, zu sprechen. Das charakteristische Polynom einer solchen Differentialgleichung kann wie im Reellen definiert werden.

K.1 Der komplexe Differentialoperator

$$\partial : C^\infty(I, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(I, \mathbb{C}), \quad x \mapsto x'$$

ist eine \mathbb{C} -lineare Abbildung.

K.2 Der Satz 3.4 und das Lemma 3.5 gelten auch für die linearen Selbstabbildungen $T : V \rightarrow V$ eines komplexen Vektorraums V , insbesondere also für den \mathbb{C} -Vektorraum $C^\infty(I, \mathbb{C})$.

K.3 Eine homogene Differentialgleichung (54) mit konstanten Koeffizienten und charakteristischem Polynom $p(X)$ kann ebenfalls in der Form

$$p(\partial)(x) = 0$$

geschrieben werden, wobei $p(X)$ das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist.

K.4 Besitzt die Differentialgleichung $p(\partial)(x) = 0$ reelle Koeffizienten, so ist die komplexwertige Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann eine Lösung, wenn die reellwertigen Funktionen $\operatorname{Re}(x)$ und $\operatorname{Im}(x)$ Lösungen dieser Differentialgleichung sind.

BEWEIS: Für eine Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ gilt wegen der \mathbb{C} -Linearität von $p(\partial)$ (siehe K.1 und K.2)

$$\begin{aligned} p(\partial)(x) &= p(\partial)(\operatorname{Re}(x) + i\operatorname{Im}(x)) \\ &= p(\partial)(\operatorname{Re}(x)) + ip(\partial)(\operatorname{Im}(x)). \end{aligned}$$

Da p reelle Koeffizienten besitzt, sind die Funktionen $p(\partial)(\operatorname{Re}(x))$ und $p(\partial)(\operatorname{Im}(x))$ reellwertig, das heißt sie sind gleich dem Real- bzw. Imaginärteil von $p(\partial)(x)$. Hieraus folgt die Behauptung. \square

K.5 Die grundlegende Beobachtung gilt: Die komplexwertige Exponentialfunktion $x(t) = e^{\alpha t}$ ist genau dann eine Lösung von $p(\partial)(x) = 0$, wenn $p(\alpha) = 0$ gilt.

K.6 Der Zerlegungssatz 3.10 gilt auch für Zerlegungen

$$p(X) = q_1(X)q_2(X)$$

von $p(X)$ in zwei teilerfremde Polynome mit komplexen Koeffizienten. Die beiden homogenen Differentialgleichungen

$$q_1(\partial)(x) = 0, \quad q_2(\partial)(x) = 0$$

besitzen dann komplexe Koeffizienten.

K.7 Die Feststellung 3.11 und damit der Satz 3.12 gelten auch für den komplexen Differentialoperator.

3.4 Homogene DGLen mit konstanten Koeffizienten II

Wir kehren zurück zur Betrachtung einer linearen Differentialgleichung (48) mit reellen Koeffizienten und sind nun in der Lage auch den Fall komplexer Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(X)$ zu behandeln. Zunächst beweisen wir ein Analogon zu Satz 3.12.

SATZ 3.26: *Es seien $\alpha = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $q(X) = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ und $f \in \mathbb{N}$. Dann ist jede Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung*

$$q(\partial)^f(x) = 0$$

auf \mathbb{R} fortsetzbar und für die Lösungsmenge $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ gilt:

1. $\mathbb{L}(\mathbb{R}) = \left\{ \sum_{k=0}^{f-1} \lambda_k t^k e^{at} \sin(bt) + \sum_{k=0}^{f-1} \mu_k t^k e^{at} \cos(bt) : \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R} \right\}$.

2. *Die Funktionen $t^k e^{at} \sin(bt)$, $t^k e^{at} \cos(bt)$, $k = 0, \dots, f - 1$, sind linear unabhängig über \mathbb{R} .*

BEWEIS: Das Polynom $q(X)^f$ kann in die teilerfremden Faktoren $(X - \alpha)^f$ und $(X - \bar{\alpha})^f$ zerlegt werden. Wegen (K.6) ist jede Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ von $q(\partial)^f(x) = 0$ von der Gestalt

$$x = x_1 + x_2,$$

wobei $x_1 : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung der Differentialgleichung $(\partial - \alpha \text{id})^f(x) = 0$ und entsprechend $x_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine von $(\partial - \bar{\alpha} \text{id})^f(x) = 0$ ist.

Da x reellwertig ist, muss $\text{Im}(x_1) + \text{Im}(x_2) = 0$ gelten, das heißt man hat

$$x = \text{Re}(x_1) + \text{Re}(x_2).$$

Nach (K.7) sind die komplexwertigen Lösungen der ersten Differentialgleichung die Funktionen

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{f-1} \nu_k t^k e^{\alpha t}, \quad \nu_k \in \mathbb{C},$$

also

$$\text{Re}(x_1) = \sum_{k=0}^{f-1} \text{Re}(\nu_k) t^k e^{at} \cos(bt) - \sum_{k=0}^{f-1} \text{Im}(\nu_k) t^k e^{at} \sin(bt).$$

Da $\bar{\alpha} = a - bi$ gilt, erhält man für x_2 entsprechend:

$$\begin{aligned} \text{Re}(x_2) &= \sum_{k=0}^{f-1} \text{Re}(\nu_k) t^k e^{at} \cos(-bt) - \sum_{k=0}^{f-1} \text{Im}(\nu_k) t^k e^{at} \sin(-bt) \\ &= \sum_{k=0}^{f-1} \text{Re}(\nu_k) t^k e^{at} \cos(bt) + \sum_{k=0}^{f-1} \text{Im}(\nu_k) t^k e^{at} \sin(bt) \end{aligned}$$

Da die ν_k beliebig gewählt werden können, ergibt sich die erste Aussage des Satzes.

Es gelte nun

$$\sum_{k=0}^{f-1} \mu_k t^k e^{at} \cos(bt) + \sum_{k=0}^{f-1} \lambda_k t^k e^{at} \sin(bt) = 0,$$

also

$$g_1(t) e^{at} \cos(bt) = g_2(t) e^{at} \sin(bt)$$

mit Polynomfunktionen g_1, g_2 . Da e^{at} keine Nullstellen besitzt, folgt

$$g_1(t) \cos(bt) = g_2(t) \sin(bt).$$

Es ist $b \neq 0$, womit $\sin(bt)$ und $\cos(bt)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Die unendlich vielen Nullstellen von $\sin(bt)$ müssen also Nullstellen der Polynomfunktion g_1 sein, was nur für $g_1 = 0$ möglich ist. Man erhält also die

Gleichung $g_2(t) \sin(bt) = 0$, die wiederum $g_2 = 0$ liefert, da die Nullstellen von $g_2(t) \sin(bt)$ die Vereinigungsmenge der Nullstellen von g_2 mit denen von $\sin(bt)$ ist. \square

Damit wird ein Hauptergebnis dieses Abschnitts erreicht:

SATZ 3.27: Für das charakteristische Polynom $p(X)$ der homogenen Differentialgleichung (48) sei

$$p = (X - \alpha_1)^{e_1} (X - \alpha_2)^{e_2} \dots (X - \alpha_r)^{e_r} q_1^{f_1} q_2^{f_2} \dots q_s^{f_s}$$

die Faktorisierung gemäß Korollar 3.8.

Zu jedem der quadratischen Polynome q_k sei $\beta_k = a_k + b_k i$ eine (notwendig echt komplexe) Nullstelle.

Dann sind die reellwertigen Lösungen von (48) genau die Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten der Funktionen

- $t^i e^{\alpha_k t}$, $i = 0, \dots, e_k - 1$, $k = 1, \dots, r$,
- $t^i e^{a_k t} \cos(b_k t)$, $t^i e^{a_k t} \sin(b_k t)$, $i = 0, \dots, f_k - 1$, $k = 1, \dots, s$.

Insbesondere besitzt der Lösungsraum $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ der Differentialgleichung eine Dimension kleiner gleich $\deg(p)$.

BEMERKUNG: In Kürze wird gezeigt, dass die Dimension des Lösungsraums gleich $\deg(p)$ ist. Die im Satz aufgelisteten Funktionen werden daher als *Fundamentalsystem von Lösungen* der Differentialgleichung bezeichnet.

BEWEIS: Es ist nichts mehr zu beweisen: Die Aussagen des Satzes sind eine Zusammenfassung von bereits bewiesenen Fakten. \square

BEISPIEL 3.28: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^{(6)} + 8x^{(4)} + 16x'' = 0.$$

Ihr charakteristisches Polynom ist

$$p(X) = X^6 + 8X^4 + 16X^2 = X^2(X^4 + 8X^2 + 16).$$

Der zweite Faktor ist biquadratisch: Die Substitution $Y = X^2$ liefert das quadratische Polynom

$$Y^2 + 8Y + 16 = (Y + 4)^2.$$

Da $X^2 + 4$ keine reellen Nullstellen besitzt, ist folglich

$$p(X) = X^2(X^2 + 4)^2$$

die für die Anwendung von Satz 3.27 benötigte Faktorisierung. Es gilt:

$$r = 1, \alpha_1 = 0, e_1 = 2, s = 1, \beta_1 = 2i, f_1 = 2.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind also

$$x(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3 \cos(2t) + \lambda_4 t \cos(2t) + \lambda_5 \sin(2t) + \lambda_6 t \sin(2t),$$

mit reellen Koeffizienten λ_k . ◇

BEISPIEL 3.29 (FEDER-MASSE-SYSTEM): Man betrachte ein mechanisches System, das aus einem Metallklotz der Masse m besteht, der horizontal auf einer ebenen Unterlage gleiten kann. Der Klotz ist über eine Feder an einer Wand befestigt. Lenkt man den Klotz gegenüber der Ruhelage, in der die Feder entspannt ist, aus, so bewirkt die von der Feder ausgeübte Kraft eine Schwingungsbewegung um die Ruhelage.

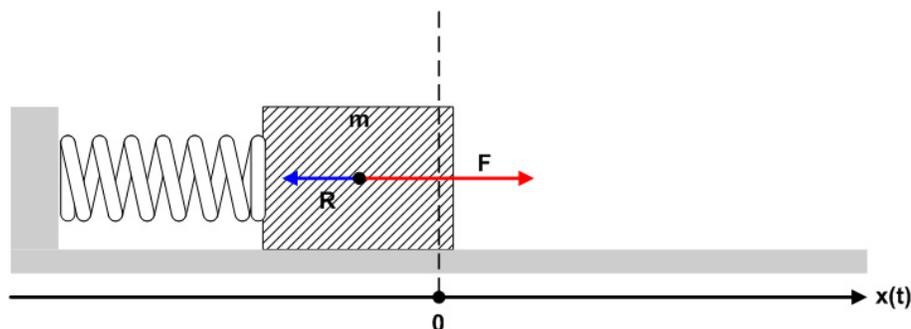


Abbildung 26: Feder-Masse-System

Um die Bewegung des Klotzes mathematisch zu beschreiben, führt man eine Koordinate $x(t)$ ein, die die Auslenkung des Klotzes zum Zeitpunkt t gegenüber der im Ursprung $x = 0$ befindlichen Ruhelage angibt. Die Reibungskräfte zwischen Klotz und Unterlage werden im Weiteren ignoriert.

Nach dem Hooke'schen¹¹ Gesetz ist die Kraft F , die eine Feder ausübt, wenn man sie um kleine Längen Δx aus der entspannten Lage dehnt oder

¹¹Robert Hooke, 1635 – 1703, englischer Physiker

staucht, gleich $k\Delta x$, wobei $k > 0$ eine federspezifische (Form, Material) Konstante ist. Es werden im Folgenden nur solche kleinen Auslenkungen betrachtet. Zum Zeitpunkt t wirkt dann auf die Masse die Federkraft

$$F(t) = -kx(t);$$

das Minuszeichen rührt daher, dass bei einer Auslenkung in positive x -Richtung aus der Ruhelage die Feder den Klotz nach links zieht.

In technischen Systemen finden Bewegungen oft in Medien mit hohem Reibungswiderstand wie Wasser oder Öl statt. Nimmt man dies an, so wirkt der Federkraft die durch die Reibung zwischen Klotz und Medium entstehende Reibungskraft R entgegen. Empirische Untersuchungen zeigen, dass diese bei nicht zu hohen Bewegungsgeschwindigkeiten proportional zur Bewegungsgeschwindigkeit ist:

$$R(t) = -\mu x'(t),$$

wobei $\mu \geq 0$ eine vom Medium und der Klotzgeometrie abhängige Konstante ist. Die Reibungskraft wirkt bei positiver Geschwindigkeit, also Bewegung in positiver x -Richtung, bremsend, daher das Vorzeichen.

Nach dem zweiten Newton'schen Gesetz ergibt sich für die die Masse $m > 0$ beschleunigende Kraft $mx''(t)$:

$$mx''(t) = -kx(t) - \mu x'(t),$$

oder

$$x''(t) + \frac{\mu}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, \quad (55)$$

wobei angenommen wird, dass $x(t)$ zweimal differenzierbar ist.

In einer realistischen Situation sucht man die Lösungen zu dieser Differentialgleichung zu bestimmten Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0. \quad (56)$$

Lenkt man die Masse etwa manuell um x_0 aus und lässt sie dann los, so gilt $x'_0 = 0$.

Die Differentialgleichung (55) ist eine homogenen lineare Differentialgleichung der Ordnung 2; ihre allgemeine Form ist

$$x'' + a_1x' + a_0x = 0,$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$p(X) = X^2 + a_1X + a_0.$$

Die hinsichtlich der Nullstellen von p auftretenden Fälle kann man knapp mit Hilfe der *Diskriminante von p*

$$\Delta := \frac{a_1^2}{4} - a_0$$

charakterisieren. Es gilt:

- $\Delta > 0$: zwei verschiedene reelle Nullstellen α_1, α_2 ,
- $\Delta = 0$: eine doppelte reelle Nullstelle α ,
- $\Delta < 0$: zwei nicht reelle, komplex-konjugierte Nullstellen $\alpha, \bar{\alpha}$.

Die Anwendung dieser Klassifikation auf die Feder-Masse-Gleichung (55) liefert:

$$\Delta = \frac{\mu^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{\mu^2 - 4km}{4m^2}$$

und daher die Fälle:

- $\mu^2 > 4km$: Für die beiden reellen Nullstellen gilt

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\Delta},$$

wobei $\sqrt{\Delta} < \frac{\mu}{2m}$, da alle vorkommenden Konstanten nicht negativ sind. *Folglich sind beide Nullstellen negativ.*

Für alle Lösungsfunktionen ergibt sich unabhängig von den Anfangsbedingungen daher

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \lambda_2 e^{\alpha_2 t} = 0.$$

Es findet keine Schwingungsbewegung statt, sondern eine Rückkehr in die Ruhelage $x = 0$ ohne einen Durchlauf durch die Ruhelage.

Physikalisch entspricht dies der Situation einer im Vergleich zur Federkraft hohen Reibung im Medium. Die Masse »kriecht« in die Ruhelage zurück, weshalb man auch vom »Kriechfall« spricht.

Je nach Anfangsbedingungen kann die Masse einen Durchgang durch die Ruhelage ausführen, bevor sie in diese zurückkriecht. Dies entspricht dem Vorliegen einer Nullstelle bei der zugehörigen Lösung.

In der Grafik 27 ist der Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -3$ als Kurve in roter Farbe zu sehen.

- $\mu^2 < 4km$: Ist

$$\alpha = a + bi$$

eine komplexe Nullstelle des Polynoms p , so gilt

$$a_1 = -2a = \frac{\mu}{m},$$

also stets $a \leq 0$.

Die Masse führt eine je nach Anfangsbedingung durch eine Gleichung der Form

$$x(t) = \lambda_1 e^{at} \cos(bt) + \lambda_2 e^{at} \sin(bt)$$

gegebene Schwingungsbewegung durch. Ist $a \neq 0$ oder äquivalent $\mu \neq 0$, so gilt wiederum $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ – die Schwingung ist gedämpft.

Physikalisch betrachtet ist in diesem Fall die durch das Medium verursachte Reibung klein im Vergleich zur Federkraft.

In der Abbildung 27 ist der Fall $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ und $\alpha = -0.35 + 6i$ als Kurve in grüner Farbe zu sehen.

- $\mu^2 = 4km$: Aus physikalischer Sicht stellt dieser Fall den Übergang zwischen den beiden bereits beschriebenen Fällen dar und wird als »aperiodischer Grenzfall« bezeichnet.

Die hier vorliegende doppelte Nullstelle bei

$$\alpha = -\frac{\mu}{2m}$$

ist negativ. Für die Lösungen gilt also wiederum

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{\alpha t} = 0.$$

Sie besitzen für $\lambda_2 \neq 0$ genau eine Nullstelle, sonst jedoch keine.

Es findet auch in diesem Fall keine Schwingungsbewegung statt. Je nach Anfangsbedingungen kehrt die Masse ohne einen Durchlauf durch die Ruhelage (keine Nullstelle von $x(t)$) oder mit genau einem solchen Durchlauf (Nullstelle von $x(t)$) in die Ruhelage zurück.

In der Abbildung 27 ist der Fall $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 1$ und $\alpha = -1$ als Kurve in blauer Farbe zu sehen.

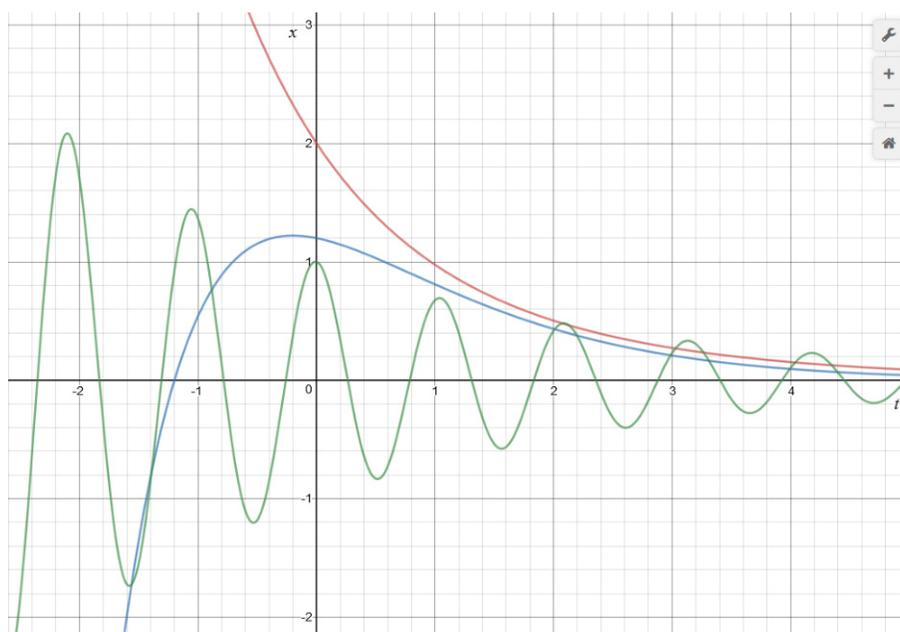


Abbildung 27: Lösungskurven der Feder-Masse-Gleichung

◇

ANFANGSWERTPROBLEME

In diesem Abschnitt wird die Frage nach der Lösbarkeit von Anfangswertproblemen der Form

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \quad (57)$$

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \quad (58)$$

beantwortet.

Im Folgenden sei f_1, \dots, f_n stets das im Satz 3.27 aufgelistete Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (57) in einer beliebigen Nummerierung.

Falls eine Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Anfangswerten (58) existiert, kann man sie als Linearkombination

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

schreiben. Gemäß den Anfangswertvorgaben muss für die Koeffizienten λ_i gelten:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t_0) &= x_0 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i'(t_0) &= x_0' \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i''(t_0) &= x_0'' \\ &\vdots = \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^{(n-1)}(t_0) &= x_0^{(n-1)}, \end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) & \cdots & f_n(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) & \cdots & f_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t_0) & f_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (59)$$

Besitzt dieses lineare Gleichungssystem eine Lösung $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – man beachte, dass die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite bekannt sind – so ist die zugehörige Linearkombination der Funktionen f_i eine Lösung des AWP (58). Wegen ihrer Bedeutung erhält die im obigen linearen Gleichungssystem auftretende Koeffizientenmatrix einen eigenen Namen:

DEFINITION 3.30: *Es seien $g_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $n - 1$ -mal differenzierbare Funktionen. Dann bezeichnet man die Matrix*

$$W(g_1, \dots, g_n) := \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_1' & g_2' & \cdots & g_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1^{(n-1)} & g_2^{(n-1)} & \cdots & g_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

als Wronski¹²-Matrix der Funktionen g_1, \dots, g_n .

Die Wronski-Matrix kann als matrixwertige Funktion

$$W(g_1, \dots, g_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, t \mapsto W(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

aufgefasst werden. Die Matrix $W(g_1(t_0), \dots, g_n(t_0))$, $t_0 \in I$, nennt man dann auch *Wronski-Matrix von g_1, \dots, g_n bei t_0* .

Wegen ihrer Bedeutung für die Lösung von AWP's ist die Invertierbarkeit der Wronski-Matrix bei t_0 von Interesse – siehe das lineare Gleichungssystem (59):

SATZ 3.31: *Es seien $g_1, \dots, g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die $n - 1$ -mal differenzierbar sind. Existiert dann ein $t_0 \in I$, für welches $W(g_1(t_0), \dots, g_n(t_0))$ invertierbar ist, so sind die Funktionen g_1, \dots, g_n linear unabhängig.*

BEWEIS: Sind g_1, \dots, g_n linear abhängige Funktionen, gilt also

$$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n = 0$$

für gewisse reelle Zahlen λ_i , von denen mindestens eine ungleich 0 ist, so folgt durch Differenzieren:

$$\lambda_1 g_1^{(k)} + \dots + \lambda_n g_n^{(k)} = 0$$

für alle existierenden Ableitungen $g_i^{(k)}$. Sind also alle g_i $n - 1$ -mal differenzierbar, so ist die Wronski-Matrix $W(g_1, \dots, g_n)$ für kein $t \in I$ invertierbar. \square

Der nächste Satz klärt die Frage der Lösbarkeit von AWP's vollständig:

SATZ 3.32: *Es sei $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (57) wie in Satz 3.27 aufgelistet. Dann ist die Wronski-Matrix*

$$W(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$$

für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ invertierbar und jedes AWP (58) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$, deren Koeffizienten λ_i man durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$W(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T = (x_0, \dots, x_0^{(n-1)})^T$$

gewinnen kann.

¹²Jozef-Maria Hoëne de Wronski, 1778–1853, polnischer Mathematiker

BEWEIS: Nach den bereits durchgeführten Vorüberlegungen genügt es die eindeutige Lösbarkeit jedes AWP (58) zu beweisen.

Zur Eindeutigkeit: Es sei x eine Lösung des AWP (58).

Aus der Analysis ist bekannt, dass die Taylor-Reihen der Funktionen f_i um den Punkt t_0 auf ganz \mathbb{R} konvergieren. Folglich gilt dies auch für die Taylor-Reihe

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \quad (60)$$

der Lösung x , da diese eine entsprechende Linearkombination der Taylor-Reihen der f_i ist. Durch das AWP sind die ersten n Koeffizienten der Taylor-Reihe eindeutig festgelegt:

$$\frac{x^{(k)}(t_0)}{k!} = \frac{x_0^{(k)}}{k!}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Aus der Analysis ist weiter bekannt, dass sich die Taylor-Reihen der Ableitungen $x^{(k)}$ von x durch gliedweises Differenzieren der Taylor-Reihe von x ergeben, und dass die resultierenden Taylor-Reihen ebenfalls auf ganz \mathbb{R} konvergieren:

$$\begin{aligned} x^{(\ell)}(t) &= \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!} k(k-1)\dots(k-\ell+1)(t-t_0)^{k-\ell} \\ &= \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{x^{(k)}(t_0)}{(k-\ell)!} (t-t_0)^{k-\ell}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Taylor-Entwicklungen in die Differentialgleichung und anschließenden Koeffizientenvergleich erhält man Rekursionsformeln für die ℓ -ten Taylor-Koeffizienten von x für $\ell \geq n$: Zunächst folgt aus der Differentialgleichung für $\ell \geq n$

$$x^{(\ell)} = -(a_{n-1}x^{(\ell-1)} + a_{n-2}x^{(\ell-2)} + \dots + a_1x^{(\ell-n+1)} + a_0x^{(\ell-n)}).$$

Diese Gleichung gilt folglich auch nach Einsetzen der Taylor-Reihen für die vorkommenden Ableitungen von x und daher für die konstanten Koeffizienten dieser Taylor-Reihen. Man erhält also:

$$x^{(\ell)}(t_0) = -(a_{n-1}x^{(\ell-1)}(t_0) + a_{n-2}x^{(\ell-2)}(t_0) + \dots + a_1x^{(\ell-n+1)}(t_0) + a_0x^{(\ell-n)}(t_0)), \quad (61)$$

womit die Taylor-Koeffizienten von x und damit x selbst durch die Anfangsbedingungen (58) eindeutig bestimmt sind.

Zur Existenz: Die Existenz einer Lösung eines gegebenen AWP (58) zeigt man, indem man diese durch die Taylorentwicklung (60) mit den Koeffizienten (61) definiert. Dabei stellt sich zunächst die Frage, ob die so definierte Potenzreihe außer bei $t = t_0$ überhaupt konvergiert. Um dies zu beweisen verwendet man das Majorantenkriterium: Es sei

$$a := \max(|a_k| : k = 0, \dots, n-1)$$

und

$$b := \max(|x_0^{(k)}| : k = 0, \dots, n-1).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |x^{(n)}(t_0)| &= |a_{n-1}x^{(n-1)}(t_0) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t_0) + \dots + a_0x^{(0)}(t_0)| \\ &\leq |a_{n-1}||x^{(n-1)}(t_0)| + |a_{n-2}||x^{(n-2)}(t_0)| + \dots + |a_0||x^{(0)}(t_0)| \\ &\leq nab. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |x^{(n+1)}(t_0)| &= |a_{n-1}x^{(n)}(t_0) + a_{n-2}x^{(n-1)}(t_0) + \dots + a_0x^{(1)}(t_0)| \\ &\leq |a_{n-1}||x^{(n)}(t_0)| + |a_{n-2}||x^{(n-1)}(t_0)| + \dots + |a_0||x^{(1)}(t_0)| \\ &\leq n^2a^2b. \end{aligned}$$

Indem man induktiv so fortfährt ergibt sich

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |x^{(n+k)}(t_0)| \leq n^{k+1}a^{k+1}b$$

und folglich

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x^{(k)}(t_0)|}{k!} |t - t_0|^k &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^{k+1}a^{k+1}b}{k!} |t - t_0|^k \\ &= nab \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(na|t-t_0|)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Die Reihe rechterhand ist bis auf den Faktor nab und die ersten n Summanden identisch mit der Potenzreihe der Exponentialfunktion zum Argument $na|t - t_0|$, folglich also konvergent. Damit konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die in Rede stehende Taylor-Reihe. Sie stellt eine Lösung des AWP dar, weil ihre Koeffizienten gerade so definiert wurden. \square

KOROLLAR 3.33: *Der Lösungsraum einer homogenen linearen Differentialgleichung der Ordnung n besitzt die Dimension n . Eine Basis wird durch die in Satz 3.27 angegebenen Funktionen geliefert.*

BEWEIS: Die im Satz 3.27 angegebenen n Funktionen f_i erzeugen den Lösungsraum der jeweiligen homogenen linearen Differentialgleichung der Ordnung n . Jedes AWP zu dieser Differentialgleichung besitzt eine eindeutige Lösung, die aus den Funktionen f_i linear kombiniert werden kann. Die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$W(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T = c$$

dessen rechte Seite c durch die Anfangsbedingungen bei t_0 gegeben ist. Da c beliebig wählbar ist, ist die Wronski-Matrix $W(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$ invertierbar und die Behauptung folgt aus Satz 3.31. \square

Die bis hier gewonnenen Erkenntnisse liefern zwei Verfahren zur Lösung von AWP's linearer, homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

VERFAHREN 3.34 (LÖSUNG VON AWP'S (58)):

1. Bestimme das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (57) und zerlege es gemäß Satz 3.27.

Letzteres kann schwierig sein.

2. Bestimme nach Satz 3.27 das Fundamentalsystem f_1, \dots, f_n von Lösungen. Die Nummerierung der Mitglieder des Fundamentalsystems ist dabei beliebig.

3. Berechne die Wronski-Matrix $W(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$.

4. Löse das lineare Gleichungssystem

$$W(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T = (x_0, \dots, x_0^{(n-1)})^T.$$

Dann ist $x(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ die Lösung des AWP.

BEISPIEL 3.35: Man betrachte das AWP

$$x'' - 2x' - 3x = 0, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 13.$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$p(X) = X^2 - 2X - 3,$$

woraus sich die Nullstellen

$$\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 3},$$

also $\alpha_1 = 3$ und $\alpha_2 = -1$ ergeben.

Der Lösungsraum der Differentialgleichung wird also von den Funktionen $f_1(t) = e^{3t}$ und $f_2(t) = e^{-t}$ erzeugt.

Die Wronskimatrix an der Stelle $t_0 = 0$ ist

$$W(f_1(0), f_2(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 13 \end{aligned}$$

zu lösen. Dessen Lösungen sind $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$, womit die Lösung des AWP die Funktion

$$x(t) = 4e^{3t} - e^{-t}$$

ist. ◇

BEISPIEL 3.36: Man betrachte das AWP

$$x'' - 6x' + 9x = 0, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 10.$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$p(X) = X^2 - 6X + 9,$$

woraus sich die Nullstellen

$$\alpha_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9},$$

also $\alpha_1 = 3$ und $e_1 = 2$ ergeben.

Der Lösungsraum der Differentialgleichung wird also von den Funktionen $f_1(t) = e^{3t}$ und $f_2(t) = te^{3t}$ erzeugt.

Es gilt $f_2' = e^{3t} + 3te^{3t} = (1 + 3t)e^{3t}$.

Die Wronskimatrix an der Stelle $t_0 = 0$ ist daher

$$W(f_1(0), f_2(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 10 \end{aligned}$$

zu lösen. Dessen Lösungen sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 16$, womit die Lösung des AWP die Funktion

$$x(t) = -2e^{3t} + 16te^{3t}$$

ist. Die Abbildung 28 zeigt den Graphen dieser Lösung in roter Farbe, sowie die der Lösungen e^{3t} (blau), $e^{3t} + te^{3t}$ (blau, unterbrochen) und $e^{3t} - te^{3t}$ (blau, punktiert). \diamond

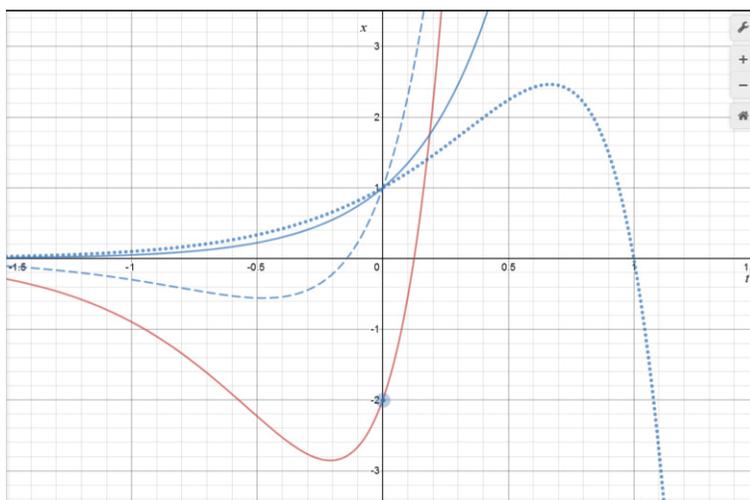


Abbildung 28: Lösungskurven von $x'' - 6x' + 9x = 0$

VERFAHREN 3.37 (NÄHERUNGSWEISE LÖSUNG VON AWP (58)): Mit dem Verfahren wird eine Polynomfunktion

$$\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_m t^m$$

bestimmt, die die Lösung des AWP approximiert. Dieses Polynom ist gerade die nach dem m -ten Glied abgebrochene Taylorreihe der Lösung x . Die Frage in welchem Intervall dieses Polynom die Lösung wie gut approximiert wird hier nicht behandelt. Prinzipiell kann man dazu die im Beweis von Satz 3.32 benutzte Ungleichung

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k \right| \leq (m+1)ab(e^{(m+1)a|t-t_0|} - \sum_{k=0}^m \frac{((m+1)a|t-t_0|)^k}{k!})$$

nutzen. Die so erhaltenen Werte sind allerdings sehr konservativ, da diese Ungleichung recht grob ist. Ansonsten ist das Verfahren einfach:

1. Lege ein hinreichend großes $m \geq n$ fest.
2. Bestimme mit Hilfe der Rekursionsformel (61) aus dem Beweis von Satz 3.32 die Funktionswerte $x^{(\ell)}(t_0)$, $\ell \in \{n, \dots, m\}$, und berechne daraus die gesuchten Koeffizienten

$$c_\ell = \frac{x^{(\ell)}(t_0)}{\ell!}.$$

BEISPIEL 3.38: Wir betrachten erneut das AWP

$$x'' - 6x' + 9x = 0, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 10.$$

aus Beispiel 3.35 und bestimmen ein Näherungspolynom vom Grad 3 für die Lösung.

Es gilt $c_0 = x(0) = -2$ und $c_1 = x'(0) = 10$. Die Rekursionsformel liefert:

$$2!c_2 = x''(0) = 6x'(0) - 9x(0) = 60 + 12 = 72$$

und

$$3!c_3 = x^{(3)}(0) = 6x''(0) - 9x'(0) = 342.$$

Es folgt:

$$\tilde{x}(t) = -2 + 10t + 36t^2 + 57t^3.$$

◇

3.5 Inhomogene DGLen mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt werden die Lösungen von Differentialgleichungen der Form

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b \quad (62)$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und einer rechten Seite

$$b : I \rightarrow \mathbb{R}$$

diskutiert. Entsprechend werden auf dem Intervall I definierte Lösungen $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht.

Nach Feststellung 3.2 besitzt die Lösungsmenge der Differentialgleichung die Form

$$\mathbb{L}(I) = x_s + \mathbb{L}_0(I),$$

wobei x_s eine Lösung der Differentialgleichung und $\mathbb{L}_0(I)$ die Lösungsmenge der Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \quad (63)$$

ist. Letztere ist nach Satz 3.27 bekannt, es genügt folglich eine einzige (»spezielle«) Lösung x_s der inhomogenen Differentialgleichung zu finden. Hierzu verwendet man die auf Lagrange¹³ zurückgehende »Methode der Variation der Konstanten«: Man nimmt an, dass eine Lösung existiert und diese die Form

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \quad (64)$$

besitzt, wobei die Funktionen f_i ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung (63) und $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmende Koeffizientenfunktionen sind. Diese seien n -mal differenzierbar.

Für die erste Ableitung von x ergibt sich dann zunächst

$$x' = \sum_{i=1}^n \lambda_i' f_i + \lambda_i f_i'.$$

Um die nachfolgenden Rechnungen einfach zu halten nimmt man zusätzlich

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i' f_i = 0$$

¹³Joseph-Louis Lagrange, französischer Mathematiker, 1736 – 1813

an und erhält

$$x' = \sum_{i=1}^n \lambda_i f'_i.$$

Erneutes Differenzieren diesmal unter der Annahme

$$\sum_{i=1}^n \lambda'_i f'_i = 0$$

liefert

$$x'' = \sum_{i=1}^n \lambda_i f''_i.$$

Dies führt man bis zur $n - 1$ -ten Ableitung fort, erhält also insgesamt

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n - 1, \quad (65)$$

unter den Annahmen

$$\sum_{i=1}^n \lambda'_i f_i^{(k-1)} = 0, \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (66)$$

Für die n -te Ableitung ergibt sich dann

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^n \lambda'_i f_i^{(n-1)} + \lambda_i f_i^{(n)}. \quad (67)$$

Nun setzt man (65) und (66) in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} b &= x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda'_i f_i^{(n-1)} + \lambda_i f_i^{(n)}) + a_{n-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^{(n-1)} + \dots + a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i f'_i + a_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda'_i f_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i^{(n)} + a_{n-1}f_i^{(n-1)} + \dots + a_1 f'_i + a_0 f_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda'_i f_i^{(n-1)}, \end{aligned}$$

wobei man im letzten Schritt verwendet, dass die f_i Lösungen von (63) sind.

Die Annahmen (66) und die daraus erhaltene Gleichung für b lassen sich punktweise, das heißt für jedes $t \in I$, in Form eines linearen Gleichungssystems schreiben:

$$W(f_1(t), \dots, f_n(t)) \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \\ \vdots \\ \lambda_{n-1}'(t) \\ \lambda_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Da nach Satz 3.32 die Wronski-Matrix $W(f_1(t), \dots, f_n(t))$ für jedes $t \in I$ invertierbar ist, folgt nach der Cramer'schen¹⁴ Regel für die Lösungen dieses Gleichungssystems:

$$\lambda_i'(t) = \frac{\det W(f_1(t), \dots, f_n(t))_i}{\det W(f_1(t), \dots, f_n(t))}. \quad (68)$$

Hierbei ist $W(f_1(t), \dots, f_n(t))_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diejenige Matrix, die aus der Matrix $W(f_1(t), \dots, f_n(t))$ hervorgeht, indem man die i -te Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt.

Nach der Leibniz'schen Formel für die Determinante ist diese eine Polynomfunktion

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$$

in n^2 Variablen, wenn man die Koeffizienten von A als Variablen auffasst. Daher ist die Funktion

$$I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \det(W(f_1(t), \dots, f_n(t)))$$

als Verkettung stetiger Funktionen stetig und die Funktionen

$$I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \det(W(f_1(t), \dots, f_n(t))_i)$$

sind aus dem gleichen Grund stetig, sofern die rechte Seite $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung stetig ist. In diesem Fall existieren die Stammfunktionen

$$\lambda_i(t) := \int \lambda_i'(t) dt, \quad i = 1, \dots, n,$$

¹⁴Gabriel Cramer, 1704 – 1752

und man kann nun leicht rückrechnen, dass die Funktion

$$x := \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Insgesamt führen die vorangegangenen Überlegungen kombiniert mit dem bereits über homogene Differentialgleichungen Bewiesenen und den allgemeinen Eigenschaften inhomogener linearer Differentialgleichungen zu:

SATZ 3.39: *Die Lösungsmenge der inhomogenen linearen Differentialgleichung*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b$$

mit konstanten Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ und stetiger rechter Seite $b : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, besitzt die Gestalt

$$\mathbb{L}(I) = \{x_s + x : x \in \mathbb{L}_0(I)\},$$

wobei $\mathbb{L}_0(I)$ die Lösungsmenge der homogenen linearen Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0$$

und $x_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Eine Lösung x_s lässt sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$W(f_1(t), \dots, f_n(t))(\lambda'_1(t), \lambda'_2(t), \dots, \lambda'_{n-1}(t))^t = (0, 0, \dots, 0, b(t))^t$$

als

$$x_s = \sum_{i=1}^n \left(\int \lambda'_i dt \right) f_i$$

gewinnen, wobei f_1, \dots, f_n ein Fundamentalsystem von Lösungen für die homogene Differentialgleichung ist.

VERFAHREN 3.40 (LÖSUNG INHOMOGENER LINEARER DGLN):

1. Bestimme das charakteristische Polynom der zur betrachteten Differentialgleichung gehörenden homogenen Differentialgleichung und zerlege es gemäß Satz 3.27.
2. Bestimme nach Satz 3.27 das Fundamentalsystem f_1, \dots, f_n von Lösungen. Die Nummerierung der Mitglieder des Fundamentalsystems ist dabei beliebig.
3. Berechne die Wronskimatrix $W(f_1, \dots, f_n) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})^{n \times n}$.
4. Löse das lineare Gleichungssystem

$$W(f_1, \dots, f_n)(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)^T = (0, \dots, 0, b)^T$$

entweder mittels Gauß-Algorithmus oder mittels der Cramer'schen Formeln (68).

5. Bestimme die Stammfunktionen λ_i der Funktionen λ'_i ; dann ist

$$x_s := \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und alle ihre Lösungen sind

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^n \mu_j f_j, \quad \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}.$$

BEISPIEL 3.41: Man betrachte die Differentialgleichung

$$x'' - 4x' + 4x = -te^{2t}.$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$x'' - 4x' + 4x = 0$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2,$$

womit die Funktionen e^{2t} und te^{2t} ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden.

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu gewinnen, wählt man den Weg über die Cramer'schen Formeln. Es sind also die Determinanten der Wronski-Matrix $W(e^{2t}, te^{2t})$, sowie der Matrizen $W(e^{2t}, te^{2t})_1$ und $W(e^{2t}, te^{2t})_2$, bei denen jeweils die erste bzw. zweite Spalte der Wronski-Matrix $W(e^{2t}, te^{2t})$ durch $(0, -te^{2t})^t$ ersetzt ist, zu berechnen.

$$\det(W(e^{2t}, te^{2t})) = \det \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{pmatrix} = e^{4t} + 2te^{4t} - 2te^{4t} = e^{4t}.$$

$$\det(W(e^{2t}, te^{2t})_1) = \det \begin{pmatrix} 0 & te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{pmatrix} = t^2 e^{4t}.$$

$$\det(W(e^{2t}, te^{2t})_2) = \det \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & -te^{2t} \end{pmatrix} = -te^{4t}.$$

Es folgt:

$$\lambda_1'(t) = \frac{t^2 e^{4t}}{e^{4t}} = t^2$$

und

$$\lambda_2'(t) = \frac{-te^{4t}}{e^{4t}} = -t.$$

Stammfunktionen dieser Funktionen sind:

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{3}t^3, \quad \lambda_2(t) = -\frac{1}{2}t^2,$$

womit sich als spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$x_s(t) = \frac{1}{3}t^3 e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 te^{2t} = -\frac{1}{6}t^3 e^{2t}$$

ergibt. Die volle Lösungsmenge der inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$x(t) = -\frac{1}{6}t^3 e^{2t} + \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 te^{2t}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

◇

ANFANGSWERTPROBLEME

Es bleibt die Lösbarkeit von Anfangswertproblemen der Form

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b \quad (69)$$

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \quad (70)$$

zu untersuchen, wobei die Stetigkeit von $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ vorausgesetzt wird.

Ist $x_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (69) und f_1, \dots, f_n ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0,$$

so löst die Funktion

$$x = x_s + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

das AWP (70) genau dann, wenn die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t_0) &= x_0 - x_s(t_0) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i'(t_0) &= x'_0 - x_s'(t_0) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i''(t_0) &= x''_0 - x_s''(t_0) \\ &\vdots = \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^{(n-1)}(t_0) &= x_0^{(n-1)} - x_s^{(n-1)}(t_0) \end{aligned}$$

sind. In Matrixform lässt sich dieses Gleichungssystem als

$$W(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T = (x_0 - x_s(t_0), \dots, x_0^{(n-1)} - x_s^{(n-1)}(t_0))^T$$

schreiben. Da nach Satz 3.32 die Matrix $W(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))$ stets invertierbar ist, besitzt das System stets eine eindeutige Lösung. Dies beweist:

SATZ 3.42: Jedes AWP (69), (70) besitzt eine eindeutige Lösung. Ist x_s eine Lösung von (69), so ist die Lösung des AWP durch

$$x = x_s + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

gegeben, wobei die Koeffizienten λ_i die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$W(f_1(t_0), \dots, f_n(t_0))(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T = (x_0 - x_s(t_0), \dots, x_0^{(n-1)} - x_s^{(n-1)}(t_0))^T$$

sind.

Das Verfahren 3.40 muss also nur um einen Schritt erweitert werden, um auch AWP's inhomogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lösen zu können.

BEISPIEL 3.43 (Fortsetzung von Beispiel 3.41): Zu der Differentialgleichung aus dem Beispiel 3.41 soll das AWP

$$x(0) = 2, \quad x'(0) = 1$$

gelöst werden. Die Wronski-Matrix wurde dort bereits berechnet; für $t_0 = 0$ ergibt sich

$$W(e^{2t_0}, t_0 e^{2t_0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch eine spezielle Lösung ist bekannt: Für $x_s = -\frac{1}{6}t^3 e^{2t}$ erhält man

$$x_s(0) = 0, \quad x'_s(0) = 0,$$

womit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen ist. Man erhält $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$, also die Lösung

$$x = -\frac{1}{6}t^3 e^{2t} + 2e^{2t} - 3te^{2t}.$$

◇



Abbildung 30: Stockbridge-Schwingungstilger an einem Hochspannungskabel

Die Gleichung für die im Szenario 29 auf m wirkenden Kräfte lautet:

$$mx''(t) = -kx(t) - \mu x'(t) + E(t),$$

wobei man das Vorzeichen von E beliebig wählen kann. Man erhält also die inhomogene Differentialgleichung

$$x'' + \frac{\mu}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}E. \quad (71)$$

Aus technischer Sicht besonders interessant (siehe oben) ist der Fall einer periodisch wirkenden Kraft E zum Beispiel der Form

$$E(t) = F_0 \sin(\omega t), \quad \omega > 0, F_0 > 0.$$

Für die weitere Diskussion betrachten wir ausschließlich den Fall

$$\Delta = \frac{\mu^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{\mu^2 - 4km}{4m^2} < 0,$$

das heißt die Masse führt ohne Anregung von außen abhängig von der Anfangsbedingung eine gedämpfte Schwingungsbewegung

$$x(t) = \lambda_1 e^{at} \cos(bt) + \lambda_2 e^{at} \sin(bt), \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

aus, wobei $a + bi$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p := X^2 + \frac{\mu}{m}X + \frac{k}{m}$$

ist. Ein Koeffizientenvergleich zeigt

$$a = -\frac{\mu}{2m}, \quad b = \sqrt{\frac{4km - \mu^2}{4m^2}}.$$

Im Weiteren wird der Kürze und Einheitlichkeit der Bezeichnungen halber $\omega_0 := b$ gesetzt. Aus naheliegenden Gründen nennt man ω_0 die *Eigenfrequenz* des betrachteten Feder-Masse-Systems und ω die *Erregerfrequenz*.

DER REIBUNGSFREIE FALL

Wir betrachten zunächst den Fall $\mu = 0$ ohne Reibung der Masse an einem Medium: Es ist dann $a = 0$ und die Differentialgleichung vereinfacht sich zu

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) \quad (72)$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$p = X^2 + \omega_0^2 = (X - \omega_0 i)(X + \omega_0 i)$$

und daher

$$f_1 = \cos(\omega_0 t), \quad f_2 = \sin(\omega_0 t),$$

als Fundamentalsystem der Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Zur Lösung von (72) muss zwischen zwei Fällen unterschieden werden:

FALL $\omega \neq \omega_0$: Eine spezielle Lösung kann leicht erraten werden:

$$x_s = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t).$$

Damit ist die Gesamtheit der Lösungen durch

$$x = \mu_1 \cos(\omega_0 t) + \mu_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Nimmt man an, die Masse m befinde sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in Ruhe, also $x'(0) = 0$, und in der Position $x(0) = 0$, so ergeben sich die Koeffizienten

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -\frac{F_0 \omega}{m \omega_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist in diesem Fall also

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)).$$

Das Verhalten dieser Lösung wird durch das Frequenzverhältnis

$$\rho := \frac{\omega}{\omega_0}$$

bestimmt, das in technischen Anwendungen von besonderem Interesse ist. Die Lösung lässt sich dann auch so schreiben:

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0}{m\omega_0^2(1-\rho^2)} (\sin(\omega t) - \rho \sin(\omega_0 t)) \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0^2(1-\rho^2)} \sin(\omega t) - \frac{F_0\rho}{m\omega_0^2(1-\rho^2)} \sin(\omega_0 t) \\ &=: x_{\text{err}} + x_{\text{eig}}. \end{aligned}$$

Die Summanden x_{eig} und x_{err} werden als Eigen- und Erregerschwingungsanteil bezeichnet. Diese Darstellung legt es nahe drei Fälle zu unterscheiden, wobei man ohne Einschränkung $\rho > 0$ annehmen kann:

1. ρ liegt nahe bei 0: In diesem Fall ist

$$x \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin(\omega t) =: \tilde{x},$$

das heißt die Schwingungsfrequenz der Lösung ist im Wesentlichen gleich der Erregerfrequenz. Die Änderung der Erreger-Schwingungsamplitude wird von den Systemgrößen ω_0 und m bestimmt.

In Abbildung 31 sind x_{err} (schwarz), x_{eig} (blau) und x (rot) im Fall $m = 0.05$, $F_0 = 10$, $\omega_0 = 10$ und $\omega = 1$ dargestellt.

2. ρ liegt nahe bei 1: In diesem Fall ist keiner der beiden Schwingungsanteile vernachlässigbar. Die Eigen- und die Erregerschwingung befinden sich zeitweise »in Phase«, das heißt beide Schwingungen erfolgen gleichzeitig in dieselbe Richtung, wodurch es insgesamt zu einer Amplitudenverstärkung kommt.

In Abbildung 32 sind x_{err} (schwarz), x_{eig} (blau) und x (rot) im Fall $m = 0.05$, $F_0 = 10$, $\omega = 4$ und $\omega_0 = 5$ dargestellt.

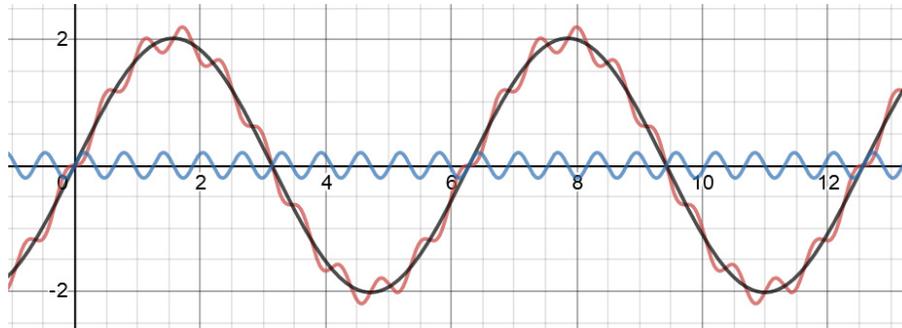


Abbildung 31: Lösung der Feder-Masse-Gleichung mit periodischer, erregender Kraft beim Frequenzverhältnis $\rho = \frac{1}{10}$

3. ρ ist »groß«: In diesem Fall besitzt der Eigenschwingsanteil die ρ -fache Amplitude des Erregerschwingungsanteils, das heißt es gilt

$$x \approx x_{\text{eig}};$$

der Eigenschwingsanteil dominiert das Verhalten der Lösung.

In Abbildung 33 sind x_{err} (schwarz), x_{eig} (blau) und x (rot) im Fall $m = 0.05$, $F_0 = 10$, $\omega = 10$ und $\omega_0 = 1$ dargestellt. Man beachte die durch das negative Vorzeichen von x_{eig} verursachte Phasenverschiebung der Lösung x gegenüber dem Eigenschwingsanteil.

Wegen

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \infty$$

kann die Amplitudenverstärkung bei wachsender Erregerfrequenz $\omega < \omega_0$ im Fall 2 beliebig groß werden. Man bezeichnet dieses Phänomen als *Resonanz* und es ist daher interessant den Fall $\omega = \omega_0$ zu untersuchen.

FALL $\omega = \omega_0$: Zur Bestimmung einer speziellen Lösung der Differentialgleichung werden hier die Cramer'schen Formeln verwendet.

$$\det(W(f_1, f_2)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} = \omega_0,$$

$$\det(W(f_1, f_2)_1) = \det \begin{pmatrix} 0 & \sin(\omega_0 t) \\ \frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} = -\frac{F_0}{m} \sin^2(\omega_0 t),$$

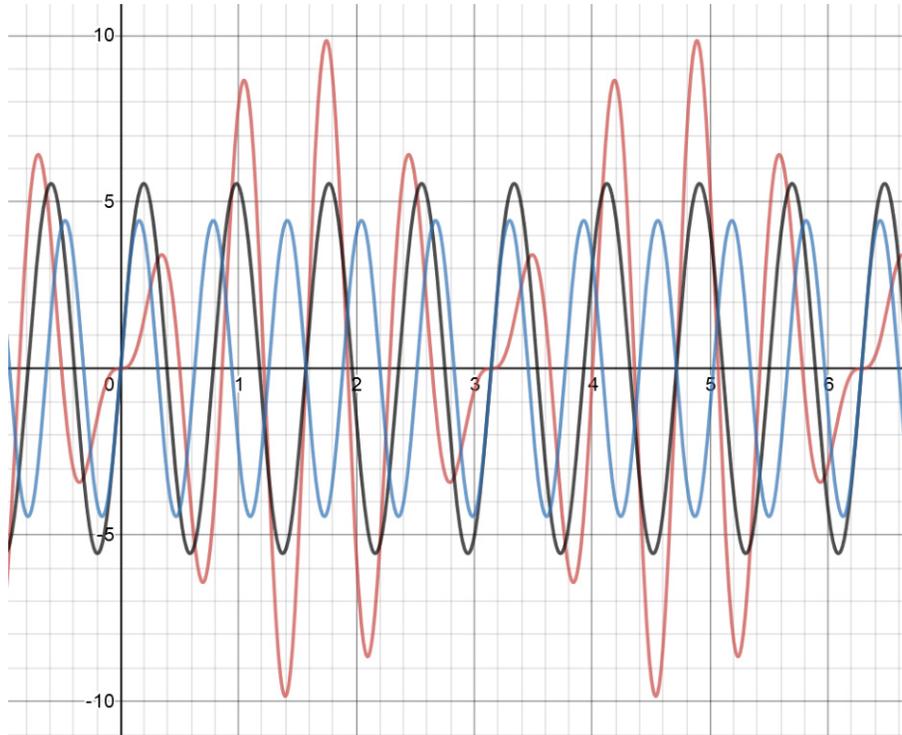


Abbildung 32: Lösung der Feder-Masse-Gleichung mit periodischer, erregender Kraft beim Frequenzverhältnis $\rho = \frac{4}{5}$

$$\det(W(f_1, f_2)_2) = \det \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & 0 \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix} = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t).$$

Für die Koeffizientenfunktionen λ_i einer speziellen Lösung der Form $x_s = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ gilt also

$$\lambda_1' = -\frac{F_0}{m\omega_0} \sin^2(\omega_0 t), \quad \lambda_2' = \frac{F_0}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t).$$

Für die Stammfunktionen λ_i zu λ_i' ergibt sich:

$$\lambda_1 = -\frac{F_0}{m\omega_0} \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right)$$

und

$$\lambda_2 = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t).$$

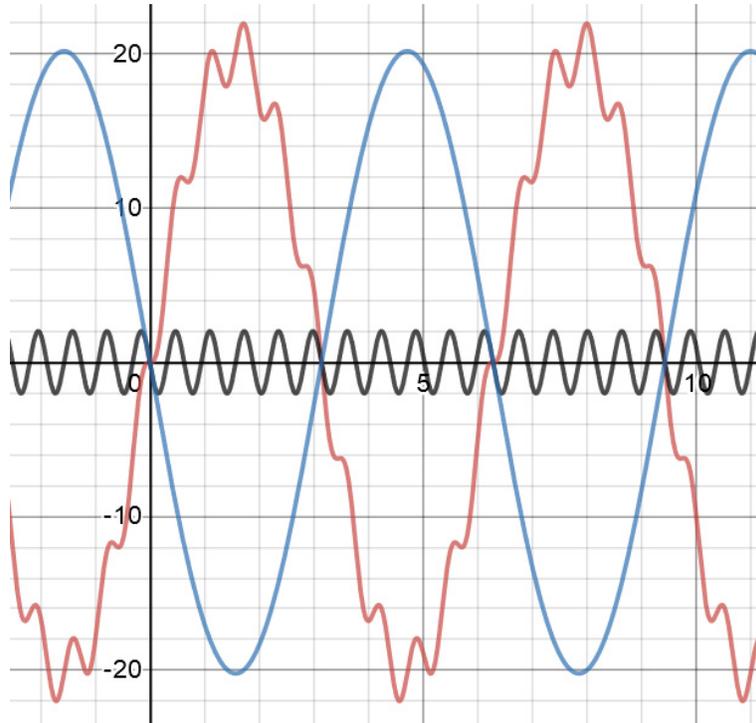


Abbildung 33: Lösung der Feder-Masse-Gleichung mit periodischer, erregender Kraft beim Frequenzverhältnis $\rho = 10$

Die Gesamtheit der Lösungen ist also durch

$$x = \mu_1 \cos(\omega_0 t) + \mu_2 \sin(\omega_0 t) - \frac{F_0}{m\omega_0} \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{4\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \sin^3(\omega_0 t)$$

gegeben. Entscheidend für die Analyse des Modells ist nun, dass alle Lösungen folglich die Form

$$x = -\frac{F_0}{2m\omega_0} t \cos(\omega_0 t) + x_b \quad (73)$$

besitzen, wobei x_b eine durch

$$C := |\mu_1| + |\mu_2| + \frac{F_0}{4m\omega_0^2} + \frac{F_0}{2m\omega_0^2}$$

beschränkte Funktion ist. Das Verhalten der Lösung wird folglich an allen Stellen $t \in \mathbb{R}$, an denen $|x(t)|$ nicht zu klein ist, durch den ersten Summanden in (73) bestimmt. Die Schwingungsamplitude dieses Summanden strebt

gegen unendlich. Da ein reales Feder-Masse-System nicht mit immer größer werdender Amplitude schwingen kann, bedeutet dies, dass das System nach endlicher Zeit zum Beispiel durch Reißen der Feder zerstört wird. Man bezeichnet diese Situation als *Resonanzkatastrophe*.

In Abbildung 34 ist die Lösung für den Fall $m = 1$, $F_0 = 1$, $\omega = \omega_0 = 1$ und $\mu_1 = \mu_2 = 0$ dargestellt.

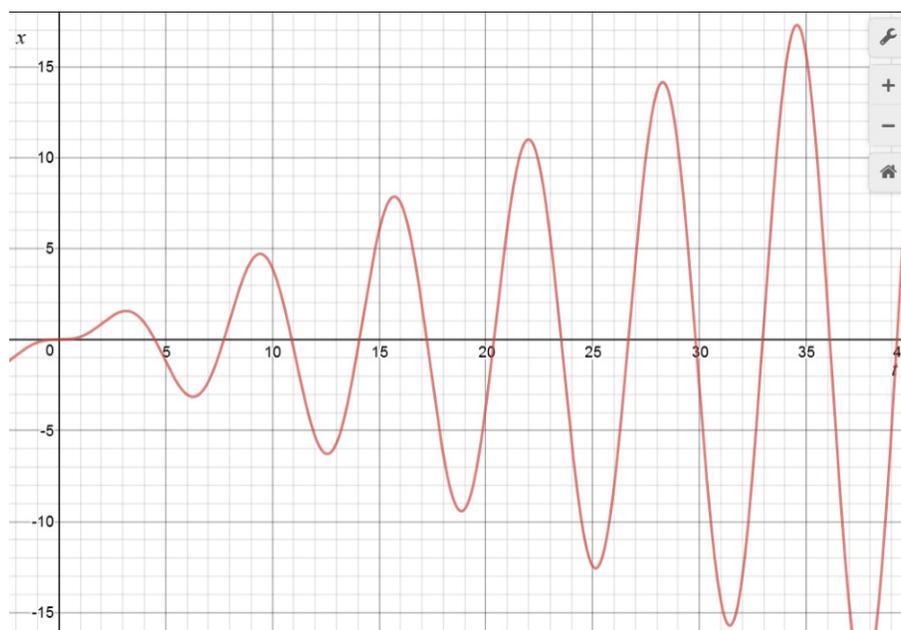


Abbildung 34: Schwingung des Feder-Masse-System im Fall $\omega = \omega_0$

EINBEZIEHEN DER REIBUNG

Im bislang diskutierten Fall gab es keine Reibung am Medium, weswegen das erhaltene Modell nicht realitätsnah ist. Wir wenden uns daher dem Fall $\mu \neq 0$ zu. Die direkte Anwendung der Cramer'schen Formeln zur Bestimmung einer speziellen Lösung führen in diesem Fall allerdings zu sehr umfangreichen Rechnungen. Diese kann man durch »Komplexifizierung« und Verwenden einer Ansatzfunktion für die Lösung vermeiden: Man schreibt die Differentialgleichung (71) zunächst in komplexer Form

$$x'' + \frac{\mu}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}, \quad (74)$$

der Imaginärteil der rechten Seite ist dann gleich der erregenden Kraft E . Folglich werden wir komplexe Lösungen der Gleichung (74) ermitteln und deren Imaginärteile betrachten. Diese sind reelle Lösungen - siehe (K.4). Der Lösungsansatz

$$x = ce^{i\omega t}, \quad c \in \mathbb{C}$$

führt zu

$$c(i^2\omega^2 + \frac{\mu}{m}i\omega + \frac{k}{m}) = \frac{F_0}{m}.$$

Mit $\frac{k}{m} = \omega_0^2 + \frac{\mu^2}{4m^2}$ ergibt sich

$$x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2} + \frac{\mu}{m}i\omega)} e^{i\omega t} = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2} - \frac{\mu}{m}i\omega)}{m((\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})^2 + \frac{\mu^2}{m^2}\omega^2)} e^{i\omega t}.$$

Gemäß unseres Ansatzes sind wir nur am Imaginärteil von x interessiert:

$$\begin{aligned} x_s = \text{Im}(x) &= \frac{F_0(-\frac{\mu}{m}\omega)}{m((\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})^2 + \frac{\mu^2}{m^2}\omega^2)} \cos(\omega t) + \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})}{m((\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})^2 + \frac{\mu^2}{m^2}\omega^2)} \sin(\omega t) \\ &= \frac{F_0}{m} \sqrt{\frac{(-\frac{\mu}{m}\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})^2}{((\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})^2 + \frac{\mu^2}{m^2}\omega^2)^2}} \sin(\omega t + \phi) \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})^2 + \frac{\mu^2}{m^2}\omega^2}} \sin(\omega t + \phi), \end{aligned}$$

wobei man die trigonometrische Identität

$$A \sin(\omega t + \phi) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t), \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \tan(\phi) = \frac{A_1}{A_2}$$

benutzt.

Jede Lösung der Differentialgleichung

$$x'' + \frac{\mu}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \sin(\omega t).$$

besitzt folglich die Form

$$x = \mu_1 e^{-\frac{\mu}{2m}t} \cos(\omega_0 t) + \mu_2 e^{-\frac{\mu}{2m}t} \sin(\omega_0 t) + x_s$$

mit gewissen $\mu_i \in \mathbb{R}$. Für hinreichend große t sind die ersten beiden Summanden wegen des Dämpfungsterms $e^{-\frac{\mu}{2m}t} \gg \text{klein} \ll$. Man erhält also:

- Jede Lösung x verhält sich nach hinreichend langer Zeit wie die spezielle Lösung x_s .

- Eine periodische, erregende Kraft versetzt das Feder-Masse-System langfristig in Schwingungen der Erregerfrequenz, die gegenüber der erregenden Schwingung phasenverschoben erfolgen. Die Amplitude dieser Schwingungen hängt in komplexer Weise von der Erregeramplitude, der Masse, dem Reibungskoeffizienten, sowie Eigen- und Erregerfrequenz ab.

In technischen Kontexten ist es interessant und wichtig die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Erregerfrequenz zu untersuchen, also die Funktion

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})^2 + \frac{\mu^2}{m^2}\omega^2}}. \quad (75)$$

Insbesondere ihre Maxima sind von Interesse. Differenzieren der Funktion liefert:

$$\frac{dA}{d\omega} = -\frac{F_0}{2m} \frac{-4(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})\omega + 2\frac{\mu^2}{m^2}\omega}{\sqrt{((\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2})^2 + \frac{\mu^2}{m^2}\omega^2)^3}}$$

Nullsetzen der Ableitung liefert den im vorliegenden Fall irrelevanten, kritischen Punkt $\omega = 0$, sowie

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\mu^2}{4m^2}) + 2\frac{\mu^2}{m^2} = 0,$$

also ist

$$\omega_R := \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{4km - \mu^2}{4m^2} - \frac{\mu^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{2m^2}}$$

ein kritischer Punkt, falls $\frac{k}{m} > \frac{\mu^2}{2m^2}$, und dort liegt ein Maximum der Amplitudenfunktion. Wir halten fest:

- Die Amplitudenfunktion $A(\omega)$ ist bei »starker« Reibung am Medium ($2mk \leq \mu^2$) eine streng monoton fallende Funktion der Erregerfrequenz ω .
- Bei »schwacher« Reibung ($2mk > \mu^2$) besitzt $A(\omega)$ ein Maximum bei einer Frequenz $\omega_R < \omega_0$. Man bezeichnet ω_R als *Resonanzfrequenz des Systems*.

Die Resonanzfrequenz besitzt in technischen Systemen eine große Bedeutung, da Schwingungen bei der Resonanzfrequenz Amplituden besitzen können, die ein System zerstören.

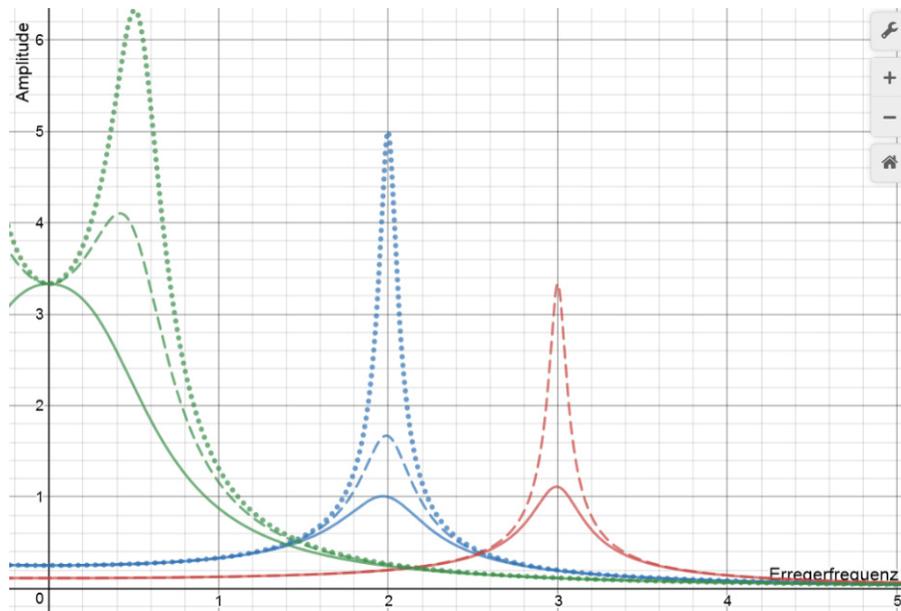


Abbildung 35: Erregerfrequenzen und Schwingungsamplituden

Die Abbildung 35 zeigt den Graphen der Funktion $A(\omega)$ im Fall $m = 1$, $F_0 = 1$ und für verschiedene Werte von k und μ :

k	μ	ω_0	ω_R	Farbe/Stil
0.3	0.9	0.3122...	–	grün/durchgezogen
0.3	0.5	0.4873...	0.4183...	grün/durchbrochen
0.3	0.3	0.5267...	0.5049...	grün/punktiert
4	0.5	1.9843...	1.9685...	blau/durchgezogen
4	0.3	1.9943...	1.9887...	blau/durchbrochen
4	0.1	1.9993...	1.9987...	blau/punktiert
9	0.3	2.9962...	2.9924...	rot/durchgezogen
9	0.1	2.9995...	2.9991...	rot/durchbrochen

◇

4 Systeme von DGLen erster Ordnung

4.1 Motivation und Grundbegriffe

In einem ökologischen System kommt es zu Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Pflanzen- oder Tierarten. Ein Beispiel für eine solche Wechselwirkung ist die Räuber-Beute-Beziehung: Die Individuen einer bestimmten Art ernähren sich von den Individuen einer zweiten Art. Die zeitlichen Entwicklungen der Populationen beider Arten sind also miteinander gekoppelt.

Der amerikanische Biologe C. B. Huffaker¹⁶ hat zur Erforschung dieser Kopplung systematische Versuche mit im Labor isolierten Milbenpopulationen durchgeführt – siehe [Huf]. Als Beutetier betrachtete er dabei die Spinnmilbe *Eotetranychus sexmaculatus* (Abbildung 36, links), die sich auf Orangen züchten lässt, von denen sich die Milben saugend ernähren. Die Raubmilbe *Typhlodromus occidentalis* (Abbildung 36, rechts) ernährt sich von diesen Spinnmilben: Eine Raubmilbe erbeutet 5 bis 15 Spinnmilben pro Tag.

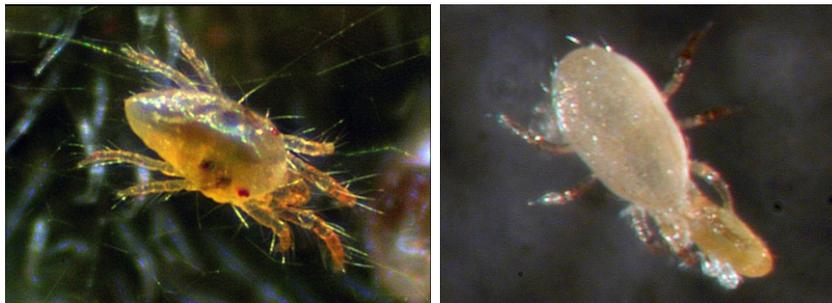


Abbildung 36: *Eotetranychus sexmaculatus* und *Typhlodromus occidentalis*
(Größe beider Arten ca. 0.4 mm)

Um möglichst realistische Bedingungen im Labor nachzustellen verwendete Huffaker Arrangements von Orangen, die über Papierstege miteinander verbunden waren, sodass die Milben auch Wanderungsbewegungen ausführen konnten. Weiter wurden die Orangen in einem solchen Arrangement teilweise durch Gummibälle ersetzt oder mit hölzernen Hindernissen versehen, um die

¹⁶Carl Barton Huffaker, amerikanischer Biologe, Ökologe und Entomologe, 1914–1995

in der Natur vorhandene ungleiche Verteilung von Nahrungsressourcen zu simulieren. Die Abbildung 37 zeigt ein solches künstliches Ökosystem.

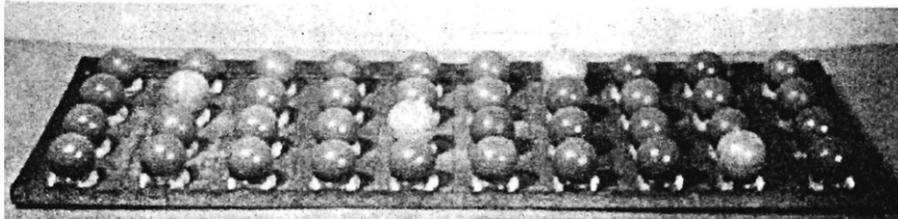


Abbildung 37: Künstliches Ökosystem im Huffaker-Experiment

Nach dem Einbringen von Spinn- und Raubmilben in ein künstliches Ökosystem beobachtete Huffaker die zeitlichen Entwicklungen der beiden Populationen über mehrere Monate. Hierzu wurden die Milbenanzahlen in regelmäßigen Abständen mit Hilfe eines Mikroskops ausgezählt. Die Abbildung 38 zeigt eine mit Markierungen versehene Orange aus Huffakers Experimenten; die markierten Areale dienten als Hilfe beim Zählen der Milben.

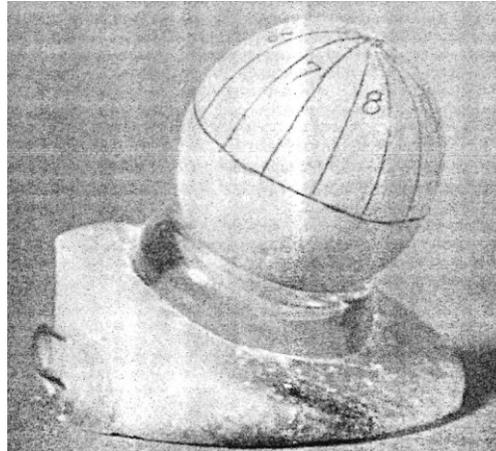


Abbildung 38: Orange mit Auszählungsarealen

Eine der von Huffaker in seinen Experimenten beobachteten Populationsentwicklungen ist in Abbildung 39 zu sehen. Diese werden durch artspezifische Parameter beeinflusst: Der Zeitraum zwischen Eiablage und der Geschlechtsreife der geschlüpften Milben beträgt für die Raubmilbe etwa 7–8

Tage und für die Spinnmilbe etwa 10 Tage. Die Lebensdauer einer Raubmilbe beträgt etwa 30 Tage; in diesem Zeitraum legen die weiblichen Tiere im Mittel 21 Eier. Spinnmilben haben eine Lebensdauer von etwa 20 Tagen und weibliche Tiere legen in ihrer Lebensspanne etwa 32 Eier.

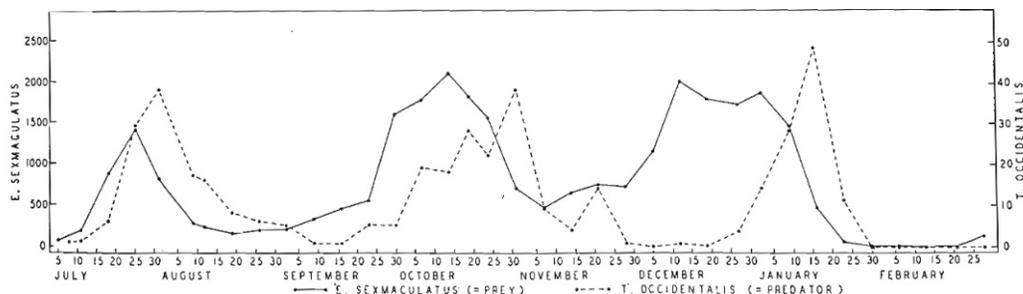


Fig. 18. Three oscillations in density of a predator-prey relation in which the predatory mite, *Typhlodromus occidentalis*, preyed upon the orange feeding six-spotted mite, *Eotetranychus sexmaculatus*.

Abbildung 39: Räuber-Beute-Wechselwirkung in Milbenpopulationen

Eine Kopplung der Populationsentwicklungen ist in Abbildung 39 deutlich zu erkennen: Einem Anwachsen der Spinnmilbenpopulation folgt stets mit einem zeitlichen Nachlauf ein Anwachsen der Raubmilbenpopulation, das wiederum zur Dezimierung der Spinnmilbenpopulation führt.

Die Erkenntnisse aus den Populationsstudien sind übrigens sehr nützlich: Da *Eotetranychus sexmaculatus* als Schädling in Obstplantagen auftritt, kann man durch gezielte Verbreitung *Typhlodromus occidentalis* als biologisches Schädlingsbekämpfungsmittel verwenden. Die Raubmilben werden zu diesem Zweck gezüchtet und verkauft.

Wie im Fall einer einzigen Population kann man versuchen die Populationsgrößen in einer Räuber-Beute-Beziehung mit Hilfe von Differentialgleichungen zu modellieren: Es seien also x_B und x_R die zeitabhängigen Populationsgrößen der Beute- und Räuberpopulation, von denen man annimmt, dass sie nach der Zeit t differenzierbar sind. Wie bei den früher betrachteten Populationsmodellen wird angenommen, dass die Beutepopulation in einem kleinen Zeitraum proportional zur aktuell vorhandenen Population und zum Zeitraum Δ selbst wächst:

$$x_B(t + \Delta) - x_B(t) = \gamma_B x_B(t) \Delta.$$

Von der Wachstumsrate γ_B wird angenommen, dass sie linear mit der Anzahl vorhandener Räuber zusammenhängt:

$$\gamma_B = \alpha_B - \beta_B x_R(t),$$

wobei $\alpha_B > 0$ die Wachstumsrate bei nicht vorhandenen Räubern ist und $\beta_B > 0$ den Einfluss der Räuberpopulation auf diese Wachstumsrate quantifiziert. Insgesamt ergibt sich die Gleichung

$$x_B(t + \Delta) - x_B(t) = \alpha_B x_B(t) \Delta - \beta_B x_B(t) x_R(t) \Delta.$$

Da die Räuber auf die Beuteindividuen als Nahrungsquelle angewiesen sind, würde sich deren Population mit einem Schrumpfungsfaktor $-\alpha_R$ verkleinern, wenn keine Beutetiere vorhanden wären. Der hier positive Einfluss vorhandener Beuteindividuen wird wieder linear modelliert:

$$\begin{aligned} x_R(t + \Delta) - x_R(t) &= (-\alpha_R + \beta_R x_B(t)) x_R(t) \Delta \\ &= -\alpha_R x_R(t) \Delta + \beta_R x_B(t) x_R(t) \Delta \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha_R, \beta_R > 0$.

Division beider Gleichungen durch Δ und Grenzübergang führt zu den miteinander *gekoppelten* Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'_B &= \alpha_B x_B - \beta_B x_B x_R \\ x'_R &= -\alpha_R x_R + \beta_R x_B x_R. \end{aligned} \tag{76}$$

Zu Ehren der Wissenschaftler Alfred Lotka¹⁷ und Vito Volterra¹⁸ wird das Differentialgleichungssystem (76) als Lotka-Volterra-Modell der Räuber-Beute-Interaktion bezeichnet.

Mit den bislang vorhandenen Mitteln ist es nicht möglich dieses Differentialgleichungssystem zu lösen oder wenigstens qualitative Aussagen über seine Lösungen zu machen. Immerhin kann man aber das Polygonzugverfahren verwenden, um sich einen (natürlich mit Vorsicht zu betrachtenden) Eindruck von Lösungen zu verschaffen. (Der Leser vergewissere sich, dass das Verfahren fast wörtlich auf den vorliegenden Fall zweier gekoppelter Differentialgleichungen übertragen werden kann.)

¹⁷Alfred James Lotka, Chemiker und Mathematiker, 1880 – 1949

¹⁸Samuel Giuseppe Vito Volterra, italienischer Mathematiker, 1860 – 1940

Das Ergebnis des Polygonzugverfahrens im Fall der Systemkoeffizienten

$$\alpha_B = \alpha_R = \beta_B = \beta_R = 1$$

ist für die Anfangsbedingungen

$$x_B(0) = 1.5, x_R(0) = 0.5$$

in Abbildung 40 dargestellt.

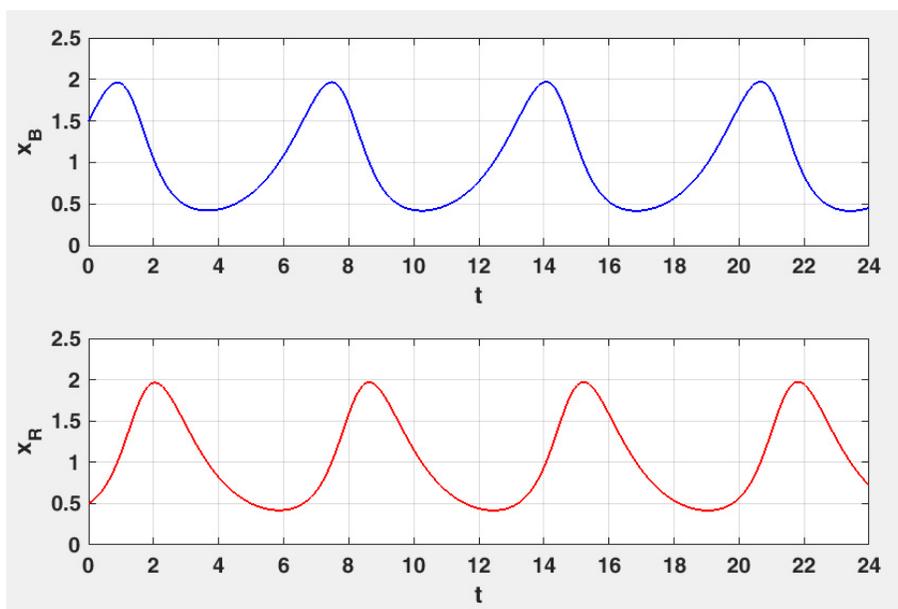


Abbildung 40: Näherungslösungen eines Lotka-Volterra-Modells

Das im Fall der Milbenpopulationen im Experiment beobachtete Verhalten der zyklischen, phasenversetzten Populationsschwankungen wird von dem Modell reproduziert.

Durch Abstraktion von dem gerade diskutierten Beispiel gelangt man zu folgenden Begriffen: Ein *explizites (gewöhnliches) Differentialgleichungssystem erster Ordnung* ist durch Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{77}$$

gegeben, wobei $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sind.

Eine *Lösung des Systems (77)* besteht aus differenzierbaren Funktionen

$$x_k : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

mit den Eigenschaften:

- $I \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Intervall,
- für alle $t \in I$ ist $(t, x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in D$,
- für alle $t \in I$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt $x'_k(t) = f_k(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Ein *Anfangswertproblem zum Differentialgleichungssystem (77)* ist die Vorgabe von Bedingungen

$$x_1(t_0) = x_{0,1}, \dots, x_n(t_0) = x_{0,n}, \quad (t_0, x_{0,1}, \dots, x_{0,n})^T \in D, \tag{78}$$

die eine Lösung von (77) erfüllen soll.

Durch konsequente Betrachtung vektorwertiger Funktionen kann man die gerade eingeführten Begriffe so fassen, dass formal kein Unterschied zum Fall einer expliziten Differentialgleichung erster Ordnung mehr besteht: Die Funktionen $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, definieren eine Abbildung

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n))^T.$$

Eine Lösung $x_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, des Differentialgleichungssystems (77) liefert analog eine differenzierbare Abbildung

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \tag{79}$$

für die gilt:

$$x' = f(t, x). \quad (80)$$

Erfüllt die Lösung zusätzlich die Anfangsbedingungen (78), so gilt

$$x'(t_0) = x_0 := (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})^T. \quad (81)$$

Umgekehrt liefert jede differenzierbare Funktion (79), die die Gleichung (80) (und (81)) erfüllt, eine Lösung des Differentialgleichungssystems (77) (und der Anfangsbedingungen (78)).

Im eingangs eingeführten Fall des Lotka-Volterra-Systems gilt zum Beispiel:

$$f(t, x_B, x_R) = \begin{pmatrix} \alpha_B x_B - \beta_B x_B x_R \\ -\alpha_R x_R + \beta_R x_B x_R \end{pmatrix},$$

wobei f den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^3$ besitzt, und Lösungen haben die Form

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_B(t) \\ x_R(t) \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass man eine Lösung nun als Kurve in der Ebene visualisieren kann, wobei anders als im Fall einer einzelnen Differentialgleichung die Variable t nicht mehr explizit in der Visualisierung in Erscheinung tritt: $x(t)$ ist eine Parameterdarstellung einer Kurve. Die in Abbildung 40 dargestellten Näherungslösungen wirken periodisch. Falls dies für die exakten Lösungen $x(t)$ zutrifft, so ist die zugehörige ebene Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ geschlossen, das heißt sie läuft wie etwa der Kreis in sich zurück.

4.2 Grundlagen linearer DGL-Systeme

In diesem Abschnitt werden die im Abschnitt 2.3 betrachteten linearen Differentialgleichungen verallgemeinert und es wird begonnen, die so definierte Klasse von Differentialgleichungssystemen zu untersuchen. Wie im Fall linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung kommt man nur durch vorübergehendes »Komplexifizieren« zu befriedigenden Ergebnissen – man rekapituliere die entsprechenden Ausführungen aus dem Abschnitt 3.2. Im Unterschied zu diesen muss nun allerdings mit vektor- und komplexwertigen Abbildungen gearbeitet werden.

Um Sachverhalte effizient formulieren zu können wird im Weiteren das Symbol \mathbb{K} für den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen oder den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen verwendet, wenn eine Aussage für beide Körper gemacht werden soll.

DEFINITION 4.1: *Ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung über \mathbb{K} ist ein Differentialgleichungssystem der Form*

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n, \end{aligned}$$

wobei $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{K}$ und $b_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ auf einem Intervall I definierte Funktionen sind.

Gilt $b_i = 0$ für alle i , so spricht man von einem homogenen Differentialgleichungssystem, ansonsten von einem inhomogenen.

Sind die Funktionen a_{ij} alle konstant, so spricht man von einem linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.

Nutzt man die im letzten Abschnitt eingeführte vektorielle Schreibweise von Differentialgleichungssystemen und führt die matrixwertige Funktion

$$A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, t \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (82)$$

sowie die vektorwertige Funktion

$$b : I \rightarrow \mathbb{K}^n, t \mapsto (b_1(t), \dots, b_n(t))^T$$

ein, so kann man ein lineares Differentialgleichungssystem kurz als

$$x' = Ax + b \quad (83)$$

schreiben. Das Matrix-Vektor-Produkt und die Summe sind dabei selbstverständlich punktweise zu verstehen, da mit Funktionen gerechnet wird.

Es stellen sich die nun schon zur Routine gewordenen Fragen:

- Besitzt ein lineares Differentialgleichungssystem Lösungen?

- Sind diese durch Anfangswerte eindeutig bestimmt?
- Wie berechnet man die Lösungen gegebenenfalls?

Bevor wir uns der systematischen Untersuchung von linearen Differentialgleichungssystemen zuwenden, wird im Folgenden ein einfaches Lösungsverfahren für »kleine« Systeme mit konstanten Koeffizienten angegeben. Dieses Verfahren ist auch deswegen interessant, weil es eine Verbindung zwischen linearen Differentialgleichungssystemen und linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung aufzeigt.

DAS ELIMINATIONSVERFAHREN

Das im Folgenden beschriebene Verfahren kann man nur zur Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen

$$x' = Ax + b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

bei »kleinem« n anwenden, also etwa $n \leq 4$, weil es für große n zu unhandlich ist und weil stärkere Voraussetzungen als notwendig gemacht werden müssen, wie sich im Verlauf der Diskussion zeigen wird. Das Verfahren wird hier im Fall $n = 2$ exemplarisch dargestellt.

Man betrachte also

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \quad (84)$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \quad (85)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $b_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $b_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Es ist notwendig verschiedene Fälle separat zu diskutieren.

- $\text{Rang}(A) = 0$ also $A = (a_{ij}) = 0$:

Die Lösungen können unmittelbar angegeben werden:

$$x_1 = \int_{t_0}^t b_1(\tau) d\tau + c_1, \quad x_2 = \int_{t_0}^t b_2(\tau) d\tau + c_2, \quad t_0 \in I, c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

offenbar wird hier nur die Stetigkeit der Funktionen b_i benötigt. Über die Wahl von t_0 und c_1, c_2 kann man auch vorgegebene Anfangsbedingungen eindeutig erfüllen.

- $\text{Rang}(A) = 1$ und eine der beiden Zeilen von A ist 0:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass die erste Zeile gleich 0 ist und erhält

$$x_1 = \int_{t_0}^t b_1(\tau) d\tau + c_1, \quad t_0 \in I, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen dieser Stammfunktion in die Gleichung (85) liefert eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die mit Satz 2.17 gelöst werden kann. Anfangsbedingungen können eindeutig erfüllt werden.

Zur Lösung wird nur die Stetigkeit der Funktionen b_i benötigt.

- $\text{Rang}(A) = 1$ und beide Zeilen von A sind ungleich 0:

Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass die zweite Zeile ein Vielfaches der ersten ist.

Durch Subtraktion eines Vielfachen der Gleichung (84) von (85) ergibt sich

$$x_2' = \lambda(x_1' - b_1) + b_2$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, also

$$x_2 = \lambda x_1 - \lambda \int_{t_0}^t b_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t b_2 + c, \quad t_0 \in I, c \in \mathbb{R}. \quad (86)$$

Einsetzen in die Gleichung (84) liefert eine lineare Differentialgleichung für x_1 , die mit Satz 2.17 gelöst werden kann.

Einsetzen der erhaltenen Lösungen x_1 in (86) liefert die Lösungen x_2 . Anfangsbedingungen legen die Lösungen wieder eindeutig fest.

Zur Lösung wird nur die Stetigkeit der Funktionen b_i benötigt.

- $\text{Rang}(A) = 2$:

Ist $a_{21} = 0$, so ist die Gleichung (85) eine lineare Differentialgleichung für x_2 , die mit Satz 2.17 gelöst werden kann. Einsetzen der Lösungen in (84) liefert jeweils eine lineare Differentialgleichung für x_1 . Damit ist das System bei gegebenen Anfangsbedingungen eindeutig lösbar. Zur Lösung wird nur die Stetigkeit der Funktionen b_i benötigt.

Sei nun $a_{21} \neq 0$. Zweimaliges Differenzieren und wiederholtes Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
 x_2'' &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + b_2' \\
 &= a_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1) + a_{22}x_2' + b_2' \\
 &= a_{21}a_{11}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 + a_{22}x_2' + b_2' + a_{21}b_1 \\
 &= a_{21}a_{11}\frac{1}{a_{21}}(x_2' - a_{22}x_2 - b_2) + a_{21}a_{12}x_2 + a_{22}x_2' + b_2' + a_{21}b_1 \\
 &= (a_{11} + a_{22})x_2' + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 + b_2' + a_{21}b_1 - a_{11}b_2.
 \end{aligned}$$

Die Funktion x_2 ist also Lösung der im allgemeinen inhomogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x_2'' - \text{Spur}(A)x_2' + \det(A)x_2 = b_2' + a_{21}b_1 - a_{11}b_2. \quad (87)$$

Ist die rechte Seite stetig, also zum Beispiel falls b_1 stetig und b_2 stetig differenzierbar ist, so kann diese Differentialgleichung mit Hilfe der Ergebnisse des Abschnitts 3 gelöst werden. Bei Vorgabe eines Anfangswertes $x_2(t_0) = x_{0,2}$ ergibt sich der Anfangswert

$$x_2'(t_0) = a_{21}x_{0,1} + a_{22}x_{0,2}$$

für die erste Ableitung von x_2 , womit die Lösung eindeutig bestimmt ist.

Hat man x_2 bestimmt, so kann man x_1 durch Einsetzen in die Gleichung (84) bestimmen.

BEISPIEL 4.2: Wir betrachten das System

$$\begin{aligned}
 x_1' &= -x_1 + 4x_2 + e^{3t} \\
 x_2' &= -x_1 + 3x_2 - 1
 \end{aligned}$$

und suchen eine Lösung $x = (x_1, x_2)^T$, welche die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$$

erfüllt. Die Teillösung x_2 löst also die Differentialgleichung (87), die hier die Form

$$x_2'' - 2x_2' + x_2 = 1 - e^{3t}$$

annimmt, mit den Anfangsbedingungen

$$x_2(0) = 0, x_2'(0) = -x_1(0) + 3x_2(0) - 1 = -1.$$

Zu ihrer Lösung wenden wir den Satz 3.42 an und bestimmen daher zunächst ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$x_2'' - 2x_2' + x_2 = 0.$$

Deren charakteristisches Polynom ist $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, womit

$$f_1 = e^t, f_2 = te^t$$

ein Fundamentalsystem ist. Eine spezielle Lösung wird mittels der Cramer'schen Formeln errechnet:

$$\det(W(f_1, f_2)) = e^{2t}, \det(W(f_1, f_2)_1) = te^t(e^{3t} - 1), \det(W(f_1, f_2)_2) = e^t(1 - e^{3t}),$$

und daher

$$\lambda_1' = te^{-t}(e^{3t} - 1) = te^{2t} - te^{-1}, \lambda_2' = e^{-t}(1 - e^{3t}) = e^{-t} - e^{2t}.$$

Es ergibt sich

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}e^{2t}(2t - 1) + e^{-t}(t + 1), \lambda_2 = -e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}.$$

und damit die spezielle Lösung

$$\begin{aligned} x_s &= \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \\ &= \frac{1}{4}(2t - 1)e^{3t} + t + 1 - t - \frac{1}{2}te^{3t} \\ &= 1 - \frac{1}{4}e^{3t}. \end{aligned}$$

Um die Anfangsbedingungen zu befriedigen muss das lineare Gleichungssystem

$$W(f_1(0), f_2(0))(\mu_1, \mu_2)^T = (0, -1)^T - (x_s(0), x_s'(0))^T$$

gelöst werden, also

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{3}{4} \\ \mu_1 + \mu_2 &= -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

und damit $\mu_2 = \frac{1}{2}$. Es folgt:

$$x_2 = -\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t + 1 - \frac{1}{4}e^{3t}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung des Differentialgleichungssystems liefert:

$$-\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{2}(t + 1)e^t - \frac{3}{4}e^{3t} = -x_1 - \frac{9}{4}e^t + \frac{3}{2}te^t + 2 - \frac{3}{4}e^{3t},$$

also

$$x_1 = te^t - 2e^t + 2.$$

◇

DIE STRUKTUR DER LÖSUNGSMENGE

Die Möglichkeit ein allgemeines lineares Differentialgleichungssystem in der Form (83) zu schreiben, motiviert dazu komplex- und vektorwertige Funktionen etwas genauer zu betrachten. Die folgenden Tatsachen sind unmittelbare Folge der Eigenschaften komplexwertiger Funktionen.

- Die Menge $\text{Fun}(I, \mathbb{K}^n)$ aller Abbildungen $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$, bildet einen Vektorraum über \mathbb{K} , wobei die Rechenoperationen komponenten- und punktweise erfolgen.

Jedes $x \in \text{Fun}(I, \mathbb{K}^n)$ ist durch n Komponentenfunktionen $x_k : I \rightarrow \mathbb{K}$ gegeben:

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T.$$

- Eine Funktion $x \in \text{Fun}(I, \mathbb{K}^n)$ ist genau dann stetig bzw. differenzierbar bzw. k -mal stetig differenzierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen x_k stetig bzw. differenzierbar bzw. k -mal stetig differenzierbar sind.
- Die Menge $C(I, \mathbb{K}^n)$ der stetigen Funktionen $x \in \text{Fun}(I, \mathbb{K}^n)$ bildet einen Untervektorraum von $\text{Fun}(I, \mathbb{K}^n)$.
- Die Menge $C^k(I, \mathbb{K}^n)$ der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen bildet einen Untervektorraum von $C(I, \mathbb{K}^n)$.

Jede matrixwertige Funktionen $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ liefert via

$$\text{Fun}(I, \mathbb{K}^n) \rightarrow \text{Fun}(I, \mathbb{K}^n), x \mapsto Ax$$

eine \mathbb{K} -lineare Abbildung. Sind alle Koeffizientenfunktionen $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig oder k -mal stetig differenzierbar oder unendlich oft differenzierbar, so erhält man entsprechend sogar lineare Abbildungen

$$C(I, \mathbb{K}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{K}^n), x \mapsto Ax$$

und

$$C^k(I, \mathbb{K}^n) \rightarrow C^k(I, \mathbb{K}^n), x \mapsto Ax$$

und

$$C^\infty(I, \mathbb{K}^n) \rightarrow C^\infty(I, \mathbb{K}^n), x \mapsto Ax.$$

Es ist nun ein Leichtes die folgende allgemeine Aussage über die Struktur der Lösungsmenge von (83) zu beweisen:

FESTSTELLUNG 4.3: 1. Die Menge $\mathbb{L}(J) \subseteq C(J, \mathbb{K}^n)$ der auf dem Intervall $J \subseteq I$ definierten Lösungen $x : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ des homogenen Differentialgleichungssystems $x' = Ax$ ist ein Untervektorraum von $C(J, \mathbb{K}^n)$.

2. Es sei $x_s : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine auf dem Intervall $J \subseteq I$ definierte Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $x' = Ax + b$ und $\mathbb{L}_0(J) \subseteq C(J, \mathbb{K}^n)$ die Menge aller auf J definierten Lösungen von $x' = Ax$. Dann gilt für die Lösungsmenge $\mathbb{L}(J)$ des inhomogenen Systems $x' = Ax + b$:

$$\mathbb{L}(J) = x_s + \mathbb{L}_0(J).$$

3. Sind die Funktionen a_{ij} und b_i sämtlich unendlich oft differenzierbar, so gilt dies auch für die Lösungen von $x' = Ax + b$; insbesondere sind die Lösungen von $x' = Ax$ im Fall $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unendlich oft differenzierbar.

4. In dem linearen Differentialgleichungssystem $x' = Ax + b$ seien die Funktionen a_{ij} reellwertig. Dann ist die Funktion $x : J \rightarrow \mathbb{C}^n$ genau dann eine Lösung, wenn die Funktion $\operatorname{Re}(x)$ eine Lösung von $x' = Ax + \operatorname{Re}(b)$ und $\operatorname{Im}(x)$ eine Lösung von $x' = Ax + \operatorname{Im}(b)$ ist.

Wie im Fall linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung lässt sich eine Lösungstheorie am einfachsten entwickeln, wenn man annimmt, dass die Koeffizientenfunktionen a_{ij} der matrixwertigen Funktion A konstant sind, weil man dann Methoden der linearen Algebra einsetzen kann. Dies wird für den Rest des Abschnitts angenommen.

Es ist klar, dass der Fokus der folgenden Ausführungen auf dem Fall reeller Koeffizienten a_{ij} und Funktionen $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ liegt, der komplexwertige Fall ist wie früher nur ein technisches Hilfsmittel.

4.3 Die matrixwertige Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion spielt bei allen bislang behandelten Typen linearer Differentialgleichungen eine ausgezeichnete Rolle. Dies ist auch für lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten der Fall. Allerdings muss die Exponentialfunktion hierzu erneut verallgemeinert werden.

Wir betrachten die Menge $\mathbb{K}^{n \times n}$ der quadratischen Matrizen mit n Zeilen und Koeffizienten im Körper \mathbb{K} . Diese Menge trägt eine reichhaltige Struktur, die im Folgenden ohne Beweise zu geben dargestellt wird. Die Beweise für die aufgelisteten Sachverhalte finden sich in den Vorlesungen lineare Algebra, Analysis und Numerik.

M.1 $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist zusammen mit der Matrixaddition und der koeffizientenweisen Multiplikation mit Zahlen ein Vektorraum der Dimension n^2 über \mathbb{K} .

M.2 $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist zusammen mit der Matrixaddition und -multiplikation ein im Fall $n \geq 2$ nicht kommutativer Ring.

M.3 Durch

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2},$$

wird eine Norm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$ definiert. Entsprechend liefert

$$d_2(A, B) := \|A - B\|_2$$

eine Metrik auf $\mathbb{K}^{n \times n}$.

M.4 Für die obige Matrixnorm gilt zusätzlich zu den Eigenschaften einer Norm die Ungleichung

$$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2.$$

M.5 Eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Matrizen $A_k = (a_{ijk})$ ist konvergent genau dann, wenn für jedes Paar (i, j) die Zahlfolge $(a_{ijk})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent ist.

M.6 Der metrische Raum $(\mathbb{K}^{n \times n}, d_2)$ ist vollständig.

Aus der Eigenschaft (M.4) folgt die im Weiteren mehrfach benutzte Stetigkeit der Matrixmultiplikation:

FESTSTELLUNG 4.4: Für jede Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind die beiden Abbildungen

$$\mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, X \mapsto CX$$

und

$$\mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, X \mapsto XC$$

stetig.

BEWEIS: Es ist zu zeigen, dass die Abbildungen stetig in jedem Punkt $X_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind. Ist $C = 0$, so sind beide Abbildungen die Nullabbildung und es ist nichts zu beweisen. Im Fall $C \neq 0$ verwendet man das ϵ - δ -Kriterium: Ist $\epsilon > 0$ gegeben, so gilt für jede Matrix X mit $\|X - X_0\|_2 < \frac{\epsilon}{\|C\|_2}$ nach (M.4) die Ungleichung

$$\|C(X - X_0)\|_2 \leq \|C\|_2 \|X - X_0\|_2 < \epsilon,$$

womit die Stetigkeit der ersten Abbildung im Punkt X_0 bewiesen ist.

Die zweite Abbildung wird analog behandelt. \square

Mit diesen wenigen Zutatzen kann man bereits den Begriff der konvergenten Reihe von Matrizen einführen:

DEFINITION 4.5: Es sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Matrizen in $\mathbb{K}^{n \times n}$. Die Folge

$$\left(\sum_{i=1}^k A_i \right)_{k \in \mathbb{N}} \quad (88)$$

bezeichnet man als unendliche Reihe von Matrizen und verwendet dafür auch das Symbol

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i; \quad (89)$$

die Glieder der Folge (88) nennt man die Partialsummen von (89).

Eine Reihe (89) heißt konvergent, falls die Folge (88) der Partialsummen konvergiert.

Eine Reihe (89) heißt absolut konvergent, falls die unendliche Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\|_2 \quad (90)$$

reeller Zahlen konvergiert.

Mit der folgenden Feststellung verschafft man sich sofort eine erhebliche Anzahl von Beispielen konvergenter Reihen von Matrizen:

FESTSTELLUNG 4.6: *Jede absolut konvergente Reihe von Matrizen ist konvergent.*

BEWEIS: Es sei $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ eine absolut konvergente Reihe von Matrizen. Da $\mathbb{K}^{n \times n}$ vollständig ist, genügt es nachzuweisen, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchyfolge ist, das heißt

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall k, \ell > n \quad \left\| \sum_{i=1}^k A_i - \sum_{i=1}^{\ell} A_i \right\|_2 < \epsilon$$

gilt. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\forall k, \ell > n \quad \left| \sum_{i=1}^k \|A_i\|_2 - \sum_{i=1}^{\ell} \|A_i\|_2 \right| < \epsilon$$

gilt. Nun ist aber

$$\left\| \sum_{i=1}^k A_i - \sum_{i=1}^{\ell} A_i \right\|_2 = \left\| \sum_{i=\ell+1}^k A_i \right\|_2 \leq \sum_{i=\ell+1}^k \|A_i\|_2,$$

wobei man ohne Einschränkung $k > \ell$ annimmt. Dies beweist die Behauptung. \square

BEISPIEL 4.7 (GEOMETRISCHE REIHE FÜR MATRIZEN): Man betrachtet eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\|A\|_2 < 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \|A^i\|_2$, da $\|A^i\|_2 \leq \|A\|_2^i$ gilt und folglich $\sum_{i=0}^{\infty} \|A\|_2^i$ eine konvergente Majorante zur letzteren ist. Es folgt, dass die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

absolut konvergiert. Ihr Grenzwert $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ lässt sich bestimmen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten die Gleichungen

$$(E - A) \left(\sum_{i=0}^n A^i \right) = E - A^{n+1} = \left(\sum_{i=0}^n A^i \right) (E - A).$$

Da die Matrixmultiplikation nach Feststellung 4.4 stetig ist, folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (E - A) \left(\sum_{i=0}^n A^i \right) &= (E - A) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n A^i \right) \\ &= (E - A)B.\end{aligned}$$

und analog

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{i=0}^n A^i \right) (E - A) \right) = B(E - A).$$

Andererseits bilden die Summanden einer konvergenten Reihe eine Nullfolge, wie unmittelbar aus dem Cauchy Kriterium folgt. Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E - A^{n+1}) = E,$$

woraus insgesamt

$$B = (E - A)^{-1}$$

folgt. Insbesondere ist der Grenzwert stets eine invertierbare Matrix.

Konkret besitzt zum Beispiel die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

die Norm

$$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}} < 1.$$

Das Anwenden der obigen Einsichten liefert dann

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i = (E - A)^{-1} = 60 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -20 \\ -15 & 30 \end{pmatrix}.$$

◇

Wir sind nun in der Lage eine matrixwertige Exponentialfunktion einzuführen:

SATZ 4.8: *Die Abbildung*

$$\mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, \quad X \mapsto e^X := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} X^i$$

ist wohldefiniert und besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. $e^0 = E$,
2. $\forall X, Y \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad XY = YX \Rightarrow e^{X+Y} = e^X e^Y$,
3. $\forall X \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad e^X e^{-X} = E$.

Die oben definierte Abbildung bezeichnet man als *Matrixexponentialfunktion*.

BEWEIS: Es gilt $\|\frac{1}{i!}X^i\|_2 \leq \frac{1}{i!}\|X\|_2^i$, womit die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \|X\|_2^i = e^{\|X\|_2}$$

eine konvergente Majorante von

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{i!} X^i \right\|_2$$

ist, woraus wiederum die Konvergenz der definierenden Reihe für e^X folgt.

1. Es gilt $e^0 = 1 \cdot 0^0 = E$.
2. Der in der Analysisvorlesung gegebene Beweis kann wörtlich übernommen werden. Ein zentraler Punkt in diesem Beweis ist die Anwendung des binomischen Satzes

$$(X + Y)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} X^k Y^{m-k}.$$

Dieser gilt mit demselben Beweis auch für Matrizen, allerdings muss man die verschiedenen, beim Ausmultiplizieren auftretenden Monome $X^i Y^j$ und $Y^j X^i$ zusammenfassen können. Dies kann man nur für vertauschbare Matrizen X, Y .

3. Dieser Punkt folgt aus den Punkten 2 und 1, da die Matrizen X und $-X$ vertauschbar sind. \square

BEMERKUNG: Man beachte, dass aus Punkt 3 die interessante Eigenschaft folgt, dass e^X stets eine invertierbare Matrix ist. Dies entspricht der Nullstellenfreiheit der reellen Exponentialfunktion.

SATZ 4.9: *Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann ist die Funktion*

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}, \quad t \mapsto e^{At}$$

differenzierbar und es gilt

$$(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A.$$

BEWEIS: Man mache sich zunächst klar, dass Differenzierbarkeit für eine matrixwertige Funktion kein neuer Begriff ist: Diese ist, wie im Fall vektorwertiger Funktionen, komponentenweise (hier also koeffizientenweise) zu verstehen. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wird dies in der Analysis-Vorlesung behandelt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wurde ein kurzer Abriss in Abschnitt 3.2 gegeben. In jedem Fall kann man den Differenzenquotienten zur Definition der Ableitung benutzen, da die betrachteten Funktionen eine reelle Variable besitzen.

Es gilt dann für $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{e^{A(t_0+h)} - e^{At_0}}{h} = \frac{e^{At_0} e^{Ah} - e^{At_0}}{h} = e^{At_0} \frac{e^{Ah} - E}{h},$$

wobei man die in Satz 4.8 gelisteten Eigenschaften der Exponentialfunktion benutzt. Man beachte auch, dass wegen der Nichtkommutativität der Matrixmultiplikation auf die Reihenfolge von Faktoren etwa beim Ausklammern zu achten ist.

Nach Definition ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \frac{e^{Ah} - E}{h} &= \frac{1}{h} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (Ah)^i - E \right) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (Ah)^i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i h^{i-1}; \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung benutzt man die Stetigkeit der Multiplikation mit einer Zahl.

Damit ergibt sich für die Ableitung

$$\begin{aligned} (e^{At})'(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t_0+h)} - e^{At_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{At_0} \frac{e^{Ah} - E}{h} \\ &= e^{At_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - E}{h} \\ &= e^{At_0} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i h^{i-1} \right) \\ &= e^{At_0} \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{i!} A^i h^{i-1} \right), \end{aligned}$$

wobei in der dritten Gleichung die Stetigkeit der Matrixmultiplikation (Feststellung 4.4) und in der letzten Gleichung die noch zu beweisende gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i h^{i-1}$ benutzt wird.

Für $i > 1$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{i!} A^i h^{i-1} \right) = 0,$$

womit sich insgesamt die Behauptung $(e^{At})'(t_0) = e^{At_0} A$ ergibt.

Die zweite Gleichung wird genauso bewiesen; man klammert anfangs e^{At_0} einfach nur nach rechts aus.

Nun zur noch offenen gleichmäßigen Konvergenz: Die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \|A\|_2^i |h|^{i-1} \quad (91)$$

ist eine konvergente Majorante zu der in Rede stehenden Reihe. Ihre Grenzwerte sind die Grenzwerte der Potenzreihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \|A\|_2^i t^{i-1}$$

bei $t = |h|$. Da Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzbereichs gleichmäßig konvergieren, gilt dies auch für die Reihe (91) und damit für $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i h^{i-1}$. \square

Mit Hilfe der matrixwertigen Exponentialfunktion kann die Lösungsmenge homogener Differentialgleichungssysteme nun vollständig beschrieben werden:

SATZ 4.10: *Die Lösungen eines homogenen Differentialgleichungssystems $x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sind auf \mathbb{R} definiert und für die Lösungsmenge gilt*

$$\mathbb{L}(\mathbb{R}) = \{e^{At}v : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Inbesondere besitzt $\mathbb{L}(\mathbb{R})$ die Dimension n .

Jedes AWP der Form

$$x' = Ax, \quad x(t_0) = x_0$$

besitzt die eindeutige Lösung $x = e^{A(t-t_0)}x_0$.

BEMERKUNG: Man beachte die Analogie dieses Satzes mit der Aussage, dass die Lösungen der Differentialgleichung $x' = \lambda x$ genau die Funktionen $x = ce^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{R}$, sind.

BEWEIS: Nach Satz 4.9 gilt für $x := e^{At}v$:

$$x' = (e^{At}v)' = Ae^{At}v = Ax;$$

hierbei verwendet man die folgende, einfach nachzurechnende Verallgemeinerung der Produktregel: Ist $B : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ eine differenzierbare, matrixwertige Funktion und $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine differenzierbare, vektorwertige Funktion, so ist die vektorwertige Funktion Bx differenzierbar und es gilt

$$(Bx)' = B'x + Bx'. \quad (92)$$

Sei andererseits x eine beliebige Lösung von $x' = Ax$. Dann gilt nach der Produktregel (92) und Satz 4.9 für die Funktion $y := e^{-At}x$:

$$y' = e^{-At}(-A)x + e^{-At}x' = e^{-At}(-A)x + e^{-At}Ax = e^{-At}((-A)x + Ax) = 0,$$

womit y konstant ist. Es folgt $x = e^{At}y$ mit $y \in \mathbb{R}^n$, wie angestrebt.

Die Aussage zur Dimension folgt aus der Tatsache, dass e^{At} für jedes t invertierbar ist. Daher sind die vektorwertigen Funktionen $a_k(t)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, die sich aus den Spalten von e^{At} ergeben, linear unabhängig über \mathbb{K} .

Nach Satz 4.8 gilt $e^{A0}v = Ev = v$, woraus die Behauptung zu den AWP's folgt. \square

Der obige Satz ist zwar theoretisch befriedigend, liefert aber für die konkrete Berechnung von Lösungen zu wenig Information: Im Allgemeinen können die Werte der Exponentialfunktion e^{At} nämlich nur numerisch berechnet werden. Bei der numerischen Berechnung von Werten der Matrixexponentialfunktion ist wegen des Konvergenzverhaltens der Exponentialreihe allerdings große Vorsicht geboten – siehe hierzu den Artikel [M-L].

BEISPIEL 4.11 (ENTKOPPELTE SYSTEME): Wir betrachten ein DGL-System in Diagonalform, das heißt

$$x' = Dx,$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist. Komponentenweise ausgeschrieben lautet das System dann:

$$x'_1 = d_1x_1, \dots, x'_n = d_nx_n,$$

wobei $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ die Diagonalelemente von D sind. Da die Gleichungen des Systems nicht gekoppelt sind, kann man die Lösungsmenge direkt angeben, nämlich:

$$\mathbb{L}(\mathbb{R}) = \{(c_1e^{d_1t}, \dots, c_ne^{d_nt})^T : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}.$$

Zu diesem Ergebnis kommt man auch durch Anwendung von Satz 4.10: Für die Diagonalmatrix D ist nämlich D^i eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen d_k^i und folglich ist

$$\begin{aligned}
 e^{Dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (Dt)^i \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \begin{pmatrix} d_1 t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n t \end{pmatrix}^i \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (d_1 t)^i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (d_2 t)^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (d_3 t)^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (d_n t)^i t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{d_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{d_n t} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

◇

BEISPIEL 4.12 (NILPOTENTE KOEFFIZIENTENMATRIX): Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt nilpotent, falls $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt. In diesem Fall kann man die Matrixexponentialfunktion exakt berechnen:

$$e^{At} = E + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!} A^{m-1} t^{m-1}.$$

Damit lässt sich auch jede Lösung des DGL-Systems $x' = Ax$ in geschlossener Form angeben:

$$x(t) = e^{At} v = v + Avt + \frac{1}{2} A^2 vt^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!} A^{m-1} vt^{m-1}.$$

BEISPIEL 4.13: Das AWP

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + 2x_2, & x_1(0) &= 0 \\x_2' &= 6x_1 - 3x_2, & x_2(0) &= 4\end{aligned}$$

soll sowohl mit dem Eliminationsverfahren als auch numerisch gelöst werden.

Für die Koeffizientenmatrix A des Systems gilt $\text{Spur}(A) = -2$ und $\det(A) = -15$. Folglich ist die Teillösung x_2 eine Lösung der Differentialgleichung

$$x_2'' + 2x_2' - 15x_2 = 0;$$

siehe (87). Für das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung gilt

$$p(X) = X^2 + 2X - 15 = (X + 5)(X - 3),$$

womit $f_1 := e^{3t}$, $f_2 := e^{-5t}$ ein Fundamentalsystem der Lösungen ist. Es gilt also

$$x_2 = \lambda e^{3t} + \mu e^{-5t},$$

wobei aus der Anfangsbedingung $x_2(0) = 3$ die Gleichung

$$\lambda + \mu = 4$$

folgt. Die zweite Differentialgleichung liefert außerdem $x_2'(0) = -12$ und daher

$$3\lambda - 5\mu = -12.$$

Dies ergibt $\lambda = 1$ und $\mu = 3$ also

$$x_2 = e^{3t} + 3e^{-5t}.$$

Einsetzen in die erste Differentialgleichung ergibt

$$x_1' = x_1 + 2e^{3t} + 6e^{-5t},$$

eine inhomogene, lineare Differentialgleichung, die sich mit Satz 2.17 leicht lösen lässt:

$$x_1 = e^{3t} - e^{-5t}.$$

Die Graphen der beiden Teillösungen sind in Abbildung 41 in schwarzer Farbe (x_1 durchgezogen, x_2 gestrichelt) dargestellt.

Nun zur numerischen Lösung: Nach Satz 4.10 ist die Lösung des obigen AWP

$$(x_1, x_2)^T = e^{At}(0, 4)^T.$$

Um Näherungslösungen zu erhalten wird die Exponentialreihe für e^{At} nach dem quadratischen Term abgebrochen; die Graphen der zugehörigen Näherungen

$$\begin{aligned}
 (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T &= (E + At + \frac{1}{2}A^2t^2)(0, 4)^T \\
 &= (0, 4)^T + A(0, 4)^T t + \frac{1}{2}A^2(0, 4)^T t^2 \\
 &= (0, 4)^T + (8, -12)^T t + (-8, 42)^T t^2 \\
 &= (8t - 8t^2, 4 - 12t + 42t^2)^T
 \end{aligned}$$

sind in Abbildung 41 in roter Farbe dargestellt (\tilde{x}_1 durchgezogen, \tilde{x}_2 gestrichelt). \diamond

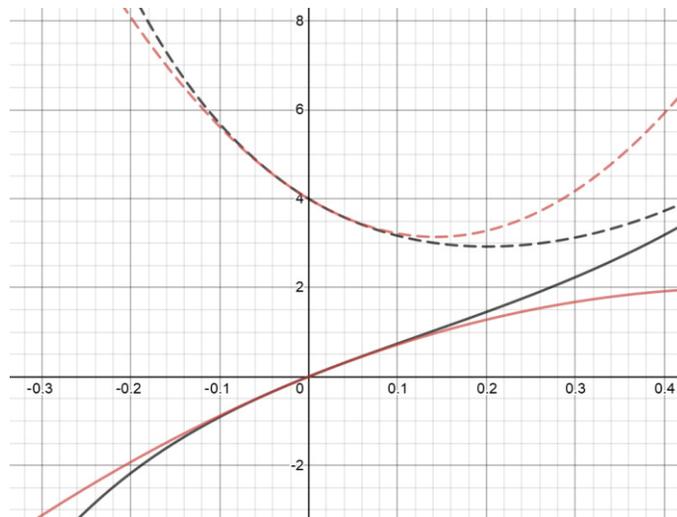


Abbildung 41: Vergleich numerischer Lösungen aus dem Beispiel 4.13

4.4 Die Eigenwertmethode

Konkrete, nicht triviale Lösungen eines homogenen Differentialgleichungssystems

$$x' = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

können aus den Eigenwerten und -vektoren der Koeffizientenmatrix A gewonnen werden, wie im Folgenden gezeigt wird. Die folgenden Sachverhalte aus der linearen Algebra sind dabei relevant:

LA.8 Die Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, falls es einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n \setminus 0$ mit der Eigenschaft $Av = \lambda v$ gibt. Man bezeichnet v als Eigenvektor zum Eigenwert λ .

Man unterscheidet zwischen reellen ($\lambda \in \mathbb{R}$) und echt komplexen ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) Eigenwerten von A .

LA.9 Die Eigenwerte der Matrix A sind genau die Nullstellen des Polynoms

$$\chi_A(X) := \det(A - XE);$$

man nennt $\chi_A(X)$ das charakteristische Polynom von A .

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra 3.7 gilt

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{e_1} \cdots (X - \lambda_r)^{e_r} (X - \mu_1)^{f_1} (X - \bar{\mu}_1)^{f_1} \cdots (X - \mu_s)^{f_s} (X - \bar{\mu}_s)^{f_s}$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $\mu_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Insbesondere besitzt jede Matrix A Eigenwerte, möglicherweise aber keine reellen.

LA.10 Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und v ein zugehöriger Eigenvektor, so ist auch die komplex-konjugierte Zahl $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A und der komplex-konjugierte Vektor \bar{v} ist ein zugehöriger Eigenvektor.

Es sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ ein reeller Eigenwert von A und $v \in \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist die Funktion

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto ve^{\lambda t}$$

eine Lösung des DGL-Systems $x' = Ax$. Denn es gilt:

$$x' = (ve^{\lambda t})' = v\lambda e^{\lambda t} = Ave^{\lambda t} = Ax.$$

Ist $\mu = a + ib \in \mathbb{C}$ ein echt komplexer Eigenwert von A und $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, so ist

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n, t \mapsto ve^{\lambda t}$$

aus dem gleichen Grund eine komplexwertige Lösung von $x' = Ax$. Spaltet man diese in Real- und Imaginärteil auf, so erhält man:

$$\operatorname{Re}(x)' + i\operatorname{Im}(x)' = A(\operatorname{Re}(x) + i\operatorname{Im}(x)) = A\operatorname{Re}(x) + iA\operatorname{Im}(x).$$

Da A reelle Koeffizienten besitzt, folgen die beiden Gleichungen

$$\operatorname{Re}(x)' = A\operatorname{Re}(x), \quad \operatorname{Im}(x)' = A\operatorname{Im}(x),$$

das heißt die Funktionen

$$\operatorname{Re}(x) = \operatorname{Re}(v)e^{at} \cos(bt) - \operatorname{Im}(v)e^{at} \sin(bt) \quad (93)$$

und

$$\operatorname{Im}(x) = \operatorname{Re}(v)e^{at} \sin(bt) + \operatorname{Im}(v)e^{at} \cos(bt) \quad (94)$$

sind reellwertige Lösungen von $x' = Ax$.

BEISPIEL 4.14: Wie betrachten erneut das DGL-System aus Beispiel 4.13

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 6x_1 - 3x_2. \end{aligned}$$

Für das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (1 - X)(-3 - X) - 12 \\ &= X^2 + 2X - 15 \\ &= (X - 3)(X + 5). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix A sind also 3 und -5 . Um einen Eigenvektor zum Eigenwert 3 zu bestimmen, ist das lineare Gleichungssystem $Av = 3v$ zu lösen. Ausgeschrieben ergibt sich

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 &= 3v_1 \\ 6v_1 - 3v_2 &= 3v_2. \end{aligned}$$

Da dieses Gleichungssystem nach Voraussetzung(!) keine eindeutige Lösung hat, genügt es die erste Gleichung zu betrachten, aus der sich $v_2 = v_1$ ergibt. Folglich sind die Vektoren

$$\alpha(1, 1)^T, \alpha \in \mathbb{R}^*,$$

Eigenvektoren zum Eigenwert 3 und man kann etwa $v = (1, 1)^T$ wählen und erhält die Lösungen

$$x = \alpha(1, 1)^T e^{3t}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Analog kann man mit dem Eigenwert -5 verfahren: Die erste Gleichung des Gleichungssystems $Av = -5v$ lautet

$$v_1 + 2v_2 = -5v_1,$$

woraus sich

$$v_2 = -3v_1$$

ergibt. Folglich sind

$$\beta(1, -3)^T, \beta \in \mathbb{R}^*,$$

die Eigenvektoren zum Eigenwert -5 und man erhält die Lösungen

$$x = \beta(1, -3)^T e^{-5t}, \beta \in \mathbb{R}.$$

Da der Lösungsraum des Systems ein Vektorraum ist, kann man beliebige Elemente aus beiden Lösungsmengen addieren und erhält erneut Lösungen, und zwar von der Form:

$$x = \alpha(1, 1)^T e^{3t} + \beta(1, -3)^T e^{-5t}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (95)$$

Da die beiden Eigenvektoren linear unabhängig über \mathbb{R} sind, sind auch die beiden Funktionen $(1, 1)^T e^{3t}$, $(1, -3)^T e^{-5t}$ linear unabhängig. Nach Satz 4.10 sind also durch (95) alle Lösungen des Systems gegeben. \diamond

BEISPIEL 4.15: Für das DGL-System

$$\begin{aligned} x_1' &= \sqrt{3}x_1 - x_2 \\ x_2' &= x_1 + \sqrt{3}x_2. \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= (\sqrt{3} - X)(\sqrt{3} - X) + 1 \\ &= X^2 - 2\sqrt{3}X + 4 \\ &= (X - (\sqrt{3} - i))(X - (\sqrt{3} + i)). \end{aligned}$$

Wir berechnen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\sqrt{3} - i$. Wiederum muss hierzu nur die erste Komponente der Eigenwertgleichung benutzt werden, also

$$\sqrt{3}v_1 - v_2 = (\sqrt{3} - i)v_1,$$

woraus sich

$$v_2 = iv_1$$

bei frei wählbarem $v_1 \in \mathbb{C}^*$ ergibt. Als Eigenvektoren erhält man also

$$v = \alpha(1, i)^T, \quad \alpha \in \mathbb{C}^*,$$

womit sich die komplexen Lösungen

$$x = \alpha(1, i)^T e^{(\sqrt{3}-i)t}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

ergeben. Um zu reellen Lösungen zu gelangen, schreibt man zunächst

$$e^{(\sqrt{3}-i)t} = e^{\sqrt{3}t}(\cos(t) - i \sin(t)).$$

Dies liefert die reellen Lösungen

$$x = \alpha_1(1, 0)^T e^{\sqrt{3}t} \cos(t) - \alpha_2(0, 1)^T e^{\sqrt{3}t} \sin(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

und

$$x = \alpha_1(1, 0)^T e^{\sqrt{3}t}(-\sin(t)) + \alpha_2(0, 1)^T e^{\sqrt{3}t} \cos(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Man beachte, dass man dabei die Formeln (93) und (94) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ anwendet. \diamond

Eine allgemeine Lösungstheorie wird im Weiteren nur für den Fall einer diagonalisierbaren Koeffizientenmatrix A entwickelt. Der allgemeine Fall ist technischer und erfordert das systematische Arbeiten mit der Jordanschen Normalform einer Matrix.

L.11 Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt reell diagonalisierbar oder diagonalisierbar über \mathbb{R} , falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, für welche $D := SAS^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

Entsprechend heißt A komplex diagonalisierbar oder diagonalisierbar über \mathbb{C} , falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, für welche $D := SAS^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

Die Diagonalelemente von D sind dann genau die Eigenwerte von A , wobei einige mehrfach vorkommen können.

L.12 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar über \mathbb{K} , wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- Das charakteristische Polynom zerfällt vollständig in Linearfaktoren:

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{e_1} \cdot \dots \cdot (X - \lambda_r)^{e_r}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

- Für die *Eigenräume*

$$E_{\lambda_i} := \{v \in \mathbb{K}^n : Av = \lambda_i v\}$$

gilt $e_i = \dim(E_{\lambda_i})$.

L.13 Für echt komplexe Eigenwerte λ gilt: $E_{\bar{\lambda}} = \overline{E_{\lambda}}$ – siehe L.10.

L.14 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar über \mathbb{K} , wenn es in \mathbb{K}^n eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von A gibt.

Eine solche Basis erhält man gegebenenfalls, indem man Basen der verschiedenen Eigenräume E_{λ_i} (siehe L.12) vereinigt.

Ist v_1, \dots, v_n eine Basis von \mathbb{K}^n bestehend aus Eigenvektoren von A , so ist für die Matrix

$$S^{-1} := (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \tag{96}$$

das Produkt SAS^{-1} eine Diagonalmatrix (siehe L.11).

Die Basis v_1, v_2, \dots, v_n kann so gewählt werden (siehe L.13), dass zu jedem Eigenvektor $v_k \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ auch der komplex-konjugierte Vektor \bar{v}_k Element der Basis ist.

Der bereits bekannte Zusammenhang zwischen Eigenwerten/Eigenvektoren und Lösungen eines homogenen DGL-Systems legt es nahe, dass man die Diagonalisierbarkeit der Koeffizientenmatrix zu dessen vollständiger Lösung nutzen kann.

SATZ 4.16: *Es sei*

$$x' = Ax + b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b : I \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (97)$$

1. *Es sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix.*

Ist dann $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, $J \subseteq I$, eine Lösung von (97), so löst die Funktion $Sx : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ das lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = SAS^{-1}y + Sb. \quad (98)$$

Ist $\mathbb{L}(J) \subseteq C(J, \mathbb{R}^n)$ die Menge der auf dem Intervall $J \subseteq I$ definierten Lösungen von (97) und $\mathbb{L}'(J)$ die Menge der auf J definierten Lösungen von (98), so ist die Abbildung

$$\mathbb{L}(J) \rightarrow \mathbb{L}'(J), \quad x \mapsto Sx$$

bijektiv; ihre Umkehrabbildung ist

$$\mathbb{L}'(J) \rightarrow \mathbb{L}(J), \quad y \mapsto S^{-1}y.$$

2. *Die unter Punkt 1 formulierten Aussagen gelten auch für komplexe, invertierbare Matrizen $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, allerdings müssen dann die komplexwertigen Lösungen der DGL-Systeme (97) und (98) betrachtet werden.*

BEWEIS: Die Ableitungsregeln liefern unmittelbar

$$(Sx)' = Sx' = S(Ax + b) = SAx + Sb = SAS^{-1}Sx + Sb.$$

Von den verbleibenden Behauptungen ist nur die Surjektivität (möglicherweise) nicht offensichtlich: Es sei also $y \in \mathbb{L}'(J)$, dann gilt:

$$(S^{-1}y)' = S^{-1}y' = S^{-1}(SAS^{-1}y + Sb) = AS^{-1}y + b.$$

Folglich ist $S^{-1}y$ eine Lösung von (97) und y ist Bild dieser Lösung. \square

KOROLLAR 4.17: *In dem homogenen Differentialgleichungssystem*

$$x' = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (99)$$

sei A reell oder komplex diagonalisierbar, v_1, \dots, v_n sei eine Basis von \mathbb{R}^n bzw. von \mathbb{C}^n bestehend aus Eigenvektoren und λ_k sei der zu v_k gehörende Eigenwert. Dann gelten:

1. Ist A reell diagonalisierbar, so bilden die Funktionen $v_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, v_n e^{\lambda_n t}$ eine Basis des Lösungsraums $\mathbb{L}(J)$ für ein beliebiges Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$, das heißt jede Lösung $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt die Form

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k e^{\lambda_k t}$$

mit durch x eindeutig bestimmten Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

2. Die unter Punkt 1 formulierten Aussagen gelten auch für eine komplex diagonalisierbare Matrix A , allerdings müssen dann die komplexwertigen Lösungen des DGL-Systems betrachtet werden.

Für jede reellwertige Lösung $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt insbesondere:

$$x = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k e^{\lambda_k t} \right), \quad 0 = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k e^{\lambda_k t} \right)$$

für die eindeutige Darstellung von x als Linearkombination der Basis.

BEMERKUNG: Mit Punkt 1 des Korollars sind die Lösungen eines DGL-Systems mit reell diagonalisierbarer Koeffizientenmatrix vollständig bestimmt.

BEWEIS: Nach Satz 4.16 und Formel (96) sind die Linearkombinationen der angegebenen Funktionen Lösungen des DGL-Systems und jede Lösung ist eine solche Linearkombination. Es bleibt also ihre lineare Unabhängigkeit zu zeigen um nachzuweisen, dass sie eine Basis des Lösungsraums bilden: Es gelte

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i e^{\lambda_i t} = 0,$$

dann folgt für $t = 0$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = 0,$$

also $\alpha_k = 0$ für alle k , da die Vektoren v_1, \dots, v_n eine Basis bilden.

Die verbleibenden Aussagen sind offensichtlich richtig. \square

Wir können nun das Hauptresultat über die Lösbarkeit von DGL-Systemen mit diagonalisierbarer Koeffizientenmatrix beweisen.

SATZ 4.18: Die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des Differentialgleichungssystems

$$x' = Ax + b$$

sei reell oder komplex diagonalisierbar und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig.

Es sei $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \overline{v_{r+1}}, \dots, v_{r+s}, \overline{v_{r+s}}$ eine aus Eigenvektoren von A bestehende Basis von \mathbb{R}^n (im reell diagonalisierbaren Fall) bzw. \mathbb{C}^n (im komplex diagonalisierbaren Fall) – siehe L.14 – mit folgenden Eigenschaften:

- Die Eigenwerte λ_k zu den Eigenvektoren v_k , $k \in \{1, \dots, r\}$, sind reell.
- Die Eigenwerte $\lambda_{r+\ell}$ zu den Eigenvektoren $v_{r+\ell}$, $\ell \in \{1, \dots, s\}$, sind echt komplex.
- Für die komplexen Eigenwerte und -vektoren seien

$$\lambda_{r+\ell} = a_\ell + ib_\ell, \quad v_{r+\ell} = u_\ell + iw_\ell$$

die Zerlegungen in Real- und Imaginärteile.

Dann gelten:

1. Die Funktionen

$$\begin{aligned} &v_k e^{\lambda_k t}, \quad k \in \{1, \dots, r\}, \\ &(u_k \cos(b_k t) - w_k \sin(b_k t)) e^{a_k t}, \quad k \in \{1, \dots, s\}, \\ &(w_k \cos(b_k t) + u_k \sin(b_k t)) e^{a_k t}, \quad k \in \{1, \dots, s\}, \end{aligned}$$

bilden eine Basis des Raums $\mathbb{L}(J)$ der Lösungen $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $x' = Ax$ für ein beliebiges Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Insbesondere besitzt dieser die Dimension n .

2. Jedes AWP $x' = Ax + b$, $x(t_0) = x_0$ besitzt eine eindeutige Lösung.

BEWEIS: Zu 1.: Nach Korollar 4.17, Punkt 1 ist nur noch der Fall zu behandeln, in dem auch echt komplexe Eigenwerte auftreten. Nach Korollar 4.17, Punkt 2 besitzt dann jede Lösung $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ die eindeutig bestimmte Gestalt

$$x = \sum_{k=1}^r \alpha_k v_k e^{\lambda_k t} + \sum_{\ell=1}^s \beta_\ell v_\ell e^{\lambda_{r+\ell} t} + \gamma_\ell \overline{v_\ell} e^{\overline{\lambda_{r+\ell}} t}$$

mit $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$x = \operatorname{Re}(x) = \sum_{k=1}^r \operatorname{Re}(\alpha_k) v_k e^{\lambda_k t} + \sum_{\ell=1}^s \operatorname{Re}(\beta_\ell v_\ell e^{\lambda_{r+\ell} t}) + \operatorname{Re}(\gamma_\ell \overline{v_\ell} e^{\overline{\lambda_{r+\ell} t}}).$$

Es gilt

$$\operatorname{Re}(\beta_\ell v_\ell e^{\lambda_{r+\ell} t}) = \operatorname{Re}(\beta_\ell) \operatorname{Re}(v_\ell e^{\lambda_{r+\ell} t}) - \operatorname{Im}(\beta_\ell) \operatorname{Im}(v_\ell e^{\lambda_{r+\ell} t})$$

und

$$\operatorname{Re}(\gamma_\ell \overline{v_\ell} e^{\overline{\lambda_{r+\ell} t}}) = \operatorname{Re}(\gamma_\ell) \operatorname{Re}(\overline{v_\ell} e^{\overline{\lambda_{r+\ell} t}}) - \operatorname{Im}(\gamma_\ell) \operatorname{Im}(\overline{v_\ell} e^{\overline{\lambda_{r+\ell} t}}).$$

Die Identitäten

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(v_\ell e^{\lambda_{r+\ell} t}) &= \operatorname{Re}(v_\ell) \cos(b_\ell t) - \operatorname{Im}(v_\ell) \sin(b_\ell t), \\ \operatorname{Im}(v_\ell e^{\lambda_{r+\ell} t}) &= \operatorname{Re}(v_\ell) \sin(b_\ell t) + \operatorname{Im}(v_\ell) \cos(b_\ell t), \\ \operatorname{Re}(\overline{v_\ell} e^{\overline{\lambda_{r+\ell} t}}) &= \operatorname{Re}(v_\ell) \cos(b_\ell t) - \operatorname{Im}(v_\ell) \cos(b_\ell t), \\ \operatorname{Im}(\overline{v_\ell} e^{\overline{\lambda_{r+\ell} t}}) &= -\operatorname{Re}(v_\ell) \sin(b_\ell t) - \operatorname{Im}(v_\ell) \cos(b_\ell t) \end{aligned}$$

zeigen, dass die unter Punkt 1 angegebenen Funktionen ein aus $r + 2s = n$ Elementen bestehendes Erzeugendensystem des Vektorraums $\mathbb{L}(J)$ der reellwertigen Lösungen von $x' = Ax$ sind. Da Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Lösung reellwertige Lösungen sind, ist diese Menge von Funktionen auch ein Erzeugendensystem des Raums der komplexwertigen Lösungen $x : J \rightarrow \mathbb{C}^n$. Nach Punkt 2 von Korollar 4.17 besitzt dieser die Dimension n , womit das in Diskussion stehende Erzeugendensystem sogar eine Basis des Raums der komplexwertigen Lösungen ist. Damit ist aber über \mathbb{R} linear unabhängig, also auch eine Basis von $\mathbb{L}(J)$.

Zu 2.: Für homogene DGL-Systeme wurde die Aussage bereits in Satz 4.10 bewiesen.

Nach Voraussetzung über die Matrix A und nach Satz 4.16 genügt es die Behauptung für Diagonalmatrizen A zu beweisen, wobei man allerdings $A \in \mathbb{C}$ und komplexwertige Lösungen zulassen muss. Die Einzeldifferentialgleichungen des Systems besitzen dann die Form

$$x'_k = d_k x_k + c_k, \quad x_k(t_0) = x_{k,0} \in \mathbb{C}$$

mit $d_k \in \mathbb{C}$ und $c_k : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Es handelt sich also um AWP einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung, deren eindeutige Lösbarkeit im Satz 2.17 bewiesen wird, falls d_k, c_k und $x_{k,0}$ reell sind. Der

dort geführte Beweis gilt allerdings auch im komplexwertigen Fall, wie sich der Leser selbst überzeugen möge. \square

Der Punkt 1 des Satzes 4.18 zeigt, dass jede Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eines homogenen DGL-Systems $x' = Ax$ die Gestalt

$$x = \sum_{k=1}^{r_0} v_k e^{\mu_k t} + \sum_{\ell=1}^{s_0} u_\ell e^{a_\ell t} \cos(b_\ell t) + w_\ell e^{a_\ell t} \sin(b_\ell t) \quad (100)$$

besitzt, wobei:

- μ_1, \dots, μ_{r_0} die *verschiedenen* reellen Eigenwerte von A sind.
- $a_1 + b_1 i, \dots, a_{s_0} + b_{s_0} i$ die *verschiedenen*, komplexen, nicht-konjugierten Eigenwerte von A sind.
- Die Vektoren $v_k, u_k, w_k \in \mathbb{R}^n$ nicht notwendig Eigenvektoren sind, da die Gleichung (100) durch Zusammenfassen gleichartiger Terme zustande kommt.

Man beachte aber unbedingt, dass nicht jede Wahl der Vektoren v_k, u_k, w_k zu einer Lösung führt.

Auf der Basis der bis hier gewonnenen Erkenntnisse kann man analytische Lösungsverfahren für lineare DGL-Systeme angeben:

VERFAHREN 4.19 (LÖSEN HOMOGENER DGL-SYSTEME):

Gegeben sei ein homogenes DGL-System $x' = Ax$ mit reell oder komplex diagonalisierbarer Koeffizientenmatrix A , sowie optional ein AWP $x(t_0) = x_0$.

1. Bestimme die *verschiedenen* reellen und komplexen, *nicht-konjugierten* Eigenwerte μ_1, \dots, μ_{r_0} und $a_1 + b_1 i, \dots, a_{s_0} + b_{s_0} i$ durch Lösen der Polynomgleichung $\det(A - XE) = 0$.
2. Der Lösungsansatz (100) liefert durch Einsetzen in das DGL-System die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{r_0} v_k e^{\mu_k t} + \sum_{\ell=1}^{s_0} u_\ell e^{a_\ell t} \cos(b_\ell t) + w_\ell e^{a_\ell t} \sin(b_\ell t) \right)' \\ & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ & \sum_{k=1}^{r_0} A v_k e^{\mu_k t} + \sum_{\ell=1}^{s_0} A u_\ell e^{a_\ell t} \cos(b_\ell t) + A w_\ell e^{a_\ell t} \sin(b_\ell t), \end{aligned}$$

also durch Koeffizientenvergleich lineare Gleichungssysteme für die Komponenten der gesuchten Vektoren v_k, u_k, w_k :

$$\begin{aligned} Av_k &= \mu_k v_k, \quad k \in \{1, \dots, r_0\}, \\ Au_k &= a_k u_k + b_k w_k, \quad k \in \{1, \dots, s_0\}, \\ Aw_k &= -b_k u_k + a_k w_k, \quad k \in \{1, \dots, s_0\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die linearen Gleichungssysteme zur Bestimmung der Vektoren v_k unabhängig voneinander gelöst werden können, während die Systeme zur Bestimmung von u_k und w_k miteinander gekoppelt sind.

Falls kein AWP vorliegt, ist das Verfahren an diesem Punkt beendet. Andernfalls geht man noch zum nächsten Schritt.

3. Durch Einsetzen von t_0 in die Gleichung (100) erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{r_0} v_k e^{\mu_k t_0} + \sum_{\ell=1}^{s_0} u_\ell e^{a_\ell t_0} \cos(b_\ell t_0) + w_\ell e^{a_\ell t_0} \sin(b_\ell t_0) = x_0$$

mit dessen Hilfe man die noch freien Parameter in der unter Punkt 2 bestimmten Familie aller Lösungen festlegt.

Man beachte dabei, dass wegen der nach Satz 4.10 eindeutigen Lösbarkeit von AWP, eine eindeutige Bestimmung der Parameter resultiert.

BEMERKUNG: Man beachte, dass der im Verfahren benutzte Koeffizientenvergleich zulässig ist, weil die vorkommenden Funktionen nach Korollar 3.33 linear unabhängig sind.

BEISPIEL 4.20: Es sollen alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + x_3 \\ x_2' &= x_1 - 2x_2 \\ x_3' &= 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

bestimmt werden.

Schritt 1: Es ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{aligned}
 \chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} -1-X & 0 & 1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ 0 & 2 & -1-X \end{pmatrix} \\
 &= -(X+1)^2(X+2) + 2 \\
 &= -(X^2+2X+1)(X+2) + 2 \\
 &= -X^3 - 2X^2 - X - 2X^2 - 4X - 2 + 2 \\
 &= -X(X^2+4X+5) \\
 &= -X(X - (-2+i))(X - (-2-i)).
 \end{aligned}$$

Es liegen drei verschiedene, allerdings zum Teil komplexe Eigenwerte vor; die Matrix A ist also komplex diagonalisierbar, womit das Verfahren weitergeführt werden kann.

Schritt 2: Die gesuchten Lösungen besitzen nach Formel (100) die Gestalt

$$x = v_1 e^{0t} + u_1 e^{-2t} \cos(t) + w_1 e^{-2t} \sin(t)$$

mit unbekanntem Vektoren $v_1, u_1, w_1 \in \mathbb{R}^3$. Folglich

$$\begin{aligned}
 x' &= -2u_1 e^{-2t} \cos(t) - u_1 e^{-2t} \sin(t) - 2w_1 e^{-2t} \sin(t) + w_1 e^{-2t} \cos(t) \\
 &= (w_1 - 2u_1) e^{-2t} \cos(t) - (u_1 + 2w_1) e^{-2t} \sin(t).
 \end{aligned}$$

und

$$Ax = Av_1 + Au_1 e^{-2t} \cos(t) + Aw_1 e^{-2t} \sin(t).$$

Der Koeffizientenvergleich liefert daher die linearen Gleichungssysteme

$$Av_1 = 0, \quad Au_1 = w_1 - 2u_1, \quad Aw_1 = -(u_1 + 2w_1);$$

man beachte, dass das erste Gleichungssystem unabhängig von den beiden anderen ist, während das zweite und dritte gekoppelt sind. Wir lösen daher zunächst das erste dieser Systeme: Mit $v_1 = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 -\nu_1 + \nu_3 &= 0 \\
 \nu_1 - 2\nu_2 &= 0 \\
 2\nu_2 - \nu_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist

$$\{\nu_2(2, 1, 2)^T : \nu_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Mit $u_1 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$ und $w_1 = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ ergibt sich für die beiden anderen Gleichungssysteme insgesamt

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_3 - \omega_1 &= 0 \\ \mu_1 - \omega_2 &= 0 \\ 2\mu_2 + \mu_3 - \omega_3 &= 0 \\ \mu_1 + \omega_1 + \omega_3 &= 0 \\ \mu_2 + \omega_1 &= 0 \\ \mu_3 + 2\omega_2 + \omega_3 &= 0.\end{aligned}$$

Nutzung der zweiten und fünften Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}\omega_2 + \mu_3 - \omega_1 &= 0 \\ -2\omega_1 + \mu_3 - \omega_3 &= 0 \\ \omega_2 + \omega_1 + \omega_3 &= 0 \\ \mu_3 + 2\omega_2 + \omega_3 &= 0.\end{aligned}$$

Nutzung der vierten Gleichung des letzten Systems ergibt:

$$\begin{aligned}-\omega_2 - \omega_3 - \omega_1 &= 0 \\ -2\omega_1 - 2\omega_2 - 2\omega_3 &= 0 \\ \omega_2 + \omega_1 + \omega_3 &= 0.\end{aligned}$$

Da die drei erhaltenen Gleichungen Vielfache voneinander sind, kann man beispielsweise ω_2 und ω_3 frei wählen und erhält für die verbleibenden Variablen:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\omega_2 - \omega_3 \\ \mu_3 &= -2\omega_2 - \omega_3 \\ \mu_2 &= \omega_2 + \omega_3 \\ \mu_1 &= \omega_2.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Lösungsmenge des DGL-Systems:

$$\mathbb{L}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \nu_2 + \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_2 + \omega_3 \\ -2\omega_2 - \omega_3 \end{pmatrix} e^{-2t} \cos(t) + \begin{pmatrix} -\omega_2 - \omega_3 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} e^{-2t} \sin(t) : \nu_2, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Lösungsraum ist also 3-dimensional, wie das nach Satz 4.18 auch zu erwarten war. \diamond

BEISPIEL 4.21 (GEKOPPELTE FEDER-MASSE-SYSTEME): Das folgende Beispiel ist eine Erweiterung des Beispiels 3.29: Zwei Massen m_1 und m_2 sind wie in Abbildung 42 dargestellt über Federn untereinander und mit Wänden verbunden. Die Massen können reibungsfrei auf einer Unterlage gleiten. Die drei Federn besitzen von links nach rechts die positiven Federkonstanten k_1, k_2, k_3 . Ein Koordinatensystem zur Beschreibung der Positionen der Massen wird so festgelegt, dass sich sein Ursprung an der linken Wand befindet. In diesem Koordinatensystem befinden sich die zwei Massen an den Positionen $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$ in Ruhe: Die wirkenden Federkräfte heben sich also an diesen Positionen gerade gegenseitig auf. Man beachte, dass dies im Allgemeinen nicht bedeutet, dass die Federn in diesen Positionen vollständig entspannt sind. Im Folgenden wird dies der Einfachheit halber allerdings angenommen.

Das hier diskutierte Beispiel lässt sich auf den Fall von $r > 2$ Massen verallgemeinern.

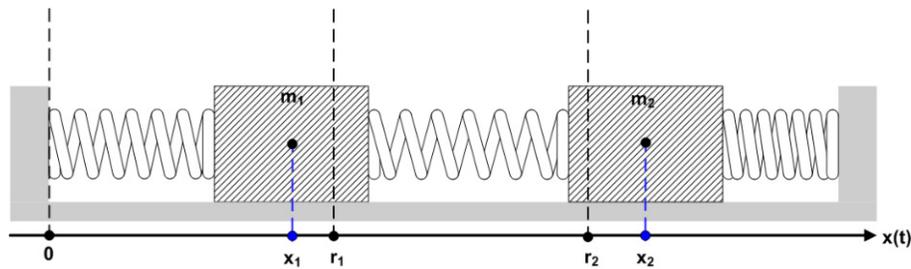


Abbildung 42: Gekoppelte Feder-Masse-Systeme

Die zeitabhängigen Positionen der beiden Massen werden im Weiteren mit x_1 und x_2 bezeichnet. Wir wenden wieder das zweite Newton'sche Gesetz und das Hooke'sche Federgesetz an, um die auf die Massen wirkenden Kräfte zu bestimmen. Es ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 m_1 x_1'' &= -k_1(x_1 - r_1) + k_2((x_2 - x_1) - (r_2 - r_1)) \\
 &= -k_1(x_1 - r_1) - k_2(x_1 - r_1) + k_2(x_2 - r_2) \\
 m_2 x_2'' &= -k_3(x_2 - r_2) - k_2((x_2 - x_1) - (r_2 - r_1)) \\
 &= -k_3(x_2 - r_2) - k_2(x_2 - r_2) + k_2(x_1 - r_1).
 \end{aligned}$$

Sie werden wie folgt aufgestellt: Auf die Masse m_1 wirkt einerseits die Federkraft $k_1(x_1 - r_1)$, und zwar in positiver Richtung, falls $x_1 - r_1 < 0$, was das

Vorzeichen erklärt. Die mittlere Feder erzeugt eine Kraft, die proportional zur Änderung ihrer Länge im Vergleich zu $r_2 - r_1$ ist, denn bei dieser Länge befinden sich die Massen in Ruhe. Das jeweilige Vorzeichen ergibt sich wieder durch Vergleich der Art der Auslenkung mit der Richtung der Kraft. Für die durch die dritte Feder auf die zweite Masse wirkende Kraft gilt dieselbe Überlegung wie für die Wirkung der ersten Feder.

Es entsteht ein lineares Differentialgleichungssystem *zweiter* Ordnung, das wir ohne Weiteres nicht lösen können. Betrachtet man dieses System, so kann man es zunächst durch Einführen neuer Koordinaten, nämlich der Auslenkungen der Massen aus der Ruhelage

$$y_k := x_k - r_k$$

vereinfachen zu

$$\begin{aligned} m_1 y_1'' &= -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 \\ m_2 y_2'' &= -(k_3 + k_2)y_2 + k_2 y_1. \end{aligned} \quad (101)$$

Mit einem Trick kann man dieses System auf ein System erster Ordnung zurückführen. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$z_1 := y_1, z_2 := y_2, z_3 := y_1', z_4 := y_2'.$$

Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1' &= z_3 \\ z_2' &= z_4 \\ z_3' &= -\frac{k_1+k_2}{m_1} z_1 + \frac{k_2}{m_1} z_2 =: -c_1 z_1 + c_2 z_2 \\ z_4' &= \frac{k_2}{m_2} z_1 - \frac{k_2+k_3}{m_2} z_2 =: c_3 z_1 - c_4 z_2, \end{aligned} \quad (102)$$

wobei die Konstanten c_k alle positiv sind.

Wir wenden nun das Verfahren 4.19 um alle Lösungen des DGL-Systems zu bestimmen: Für das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix erhält man durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile und Verwenden der Sarrus'schen¹⁹ Regel:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det \begin{pmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ c_1 & -c_2 & X & 0 \\ -c_3 & c_4 & 0 & X \end{pmatrix} \\ &= X(X^3 + c_4 X) - (-c_1 c_4 + c_3 c_2 - c_1 X^2) \\ &= X^4 + (c_1 + c_4) X^2 + c_1 c_4 - c_3 c_2. \end{aligned}$$

¹⁹Piere Frederic Sarrus, französischer Mathematiker, 1798–1861

Das Polynom χ_A ist also biquadratisch und man kann seine Nullstellen durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$Y^2 + (c_1 + c_4)Y + c_1c_4 - c_3c_2 = 0$$

bestimmen:

$$Y_{1,2} = -\frac{1}{2}(c_1 + c_4) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(c_1 + c_4)^2 - (c_1c_4 - c_2c_3)}.$$

Da

$$\Delta := \frac{1}{4}(c_1 + c_4)^2 - (c_1c_4 - c_2c_3) = \frac{1}{4}(c_1 - c_4)^2 + c_2c_3 > 0$$

ist, sind beide Nullstellen reell und die zweite ist negativ. Andererseits ist

$$c_1c_4 - c_2c_3 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} \frac{k_2 + k_3}{m_2} - \frac{k_2^2}{m_1m_2} = \frac{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}{m_1m_2} > 0,$$

womit auch die erste Nullstelle negativ ist. Die Nullstellen von χ_A sind also rein imaginär:

$$\lambda_1 = \sqrt{|Y_1|}i, \lambda_2 = \sqrt{|Y_2|}i, \lambda_3 = -\sqrt{|Y_1|}i, \lambda_4 = -\sqrt{|Y_2|}i.$$

Die Formel (100) lehrt als qualitatives Resultat, dass die Lösungen des Systems (102) die Form

$$z = u_1 \cos(\sqrt{|Y_1|}t) + w_1 \sin(\sqrt{|Y_1|}t) + u_2 \cos(\sqrt{|Y_2|}t) + w_2 \sin(\sqrt{|Y_2|}t)$$

mit bislang unbekanntenen Vektoren $u_k, w_k \in \mathbb{R}^4$ besitzen. Damit ergibt sich

$$z' = -\sqrt{|Y_1|}u_1 \sin(\sqrt{|Y_1|}t) + \sqrt{|Y_1|}w_1 \cos(\sqrt{|Y_1|}t) - \sqrt{|Y_2|}u_2 \sin(\sqrt{|Y_2|}t) + \sqrt{|Y_2|}w_2 \cos(\sqrt{|Y_2|}t)$$

und

$$Az = Au_1 \cos(\sqrt{|Y_1|}t) + Aw_1 \sin(\sqrt{|Y_1|}t) + Au_2 \cos(\sqrt{|Y_2|}t) + Aw_2 \sin(\sqrt{|Y_2|}t).$$

Der Koeffizientenvergleich führt also zu den linearen Gleichungssystemen

$$Au_1 = \sqrt{|Y_1|}w_1, Aw_1 = -\sqrt{|Y_1|}u_1, Au_2 = \sqrt{|Y_2|}w_2, Aw_2 = -\sqrt{|Y_2|}u_2.$$

Anstatt diese blindlings zu lösen, beachte man, dass sich aus diesen die beiden Gleichungen

$$A^2u_1 = -|Y_1|u_1, A^2u_2 = -|Y_2|u_2$$

ergeben. Die Vektoren u_i sind also Eigenvektoren der Matrix A^2 zu den Eigenwerten $-|Y_2|$. Hat man u_i bestimmt, so kann man w_i leicht berechnen.

Nun ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} -c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ c_3 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_4 \end{pmatrix},$$

womit die Eigenvektoren u_i nur mit Hilfe der linken, oberen 2×2 -Teilmatrix berechnet werden können.

Betrachten wir einen konkreten Fall: $m_1 = m_2 = 1$ und $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Dann ist

$$c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 2,$$

und folglich

$$Y_1 = -1, Y_2 = -3$$

also

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = \sqrt{3}i.$$

Zur Bestimmung von u_1 ist ein Eigenvektor der Matrix

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert -1 zu bestimmen, also ist

$$\begin{aligned} -2\nu_1 + \nu_2 &= -\nu_1 \\ \nu_1 - 2\nu_2 &= -\nu_2 \end{aligned}$$

zu lösen, was $\nu_2 = \nu_1$ bei frei wählbarem ν_1 und damit

$$u_1 = \nu_1(1 \ 1 \ 1 \ 1)^T, \nu_1 \in \mathbb{R}^*$$

ergibt. Hieraus errechnet sich

$$w_1 = Au_1 = \nu_1(1 \ 1 \ -1 \ -1)^T.$$

Für den Eigenwert $-|Y_2| = -3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} -2\nu_1 + \nu_2 &= -3\nu_1 \\ \nu_1 - 2\nu_2 &= -3\nu_2, \end{aligned}$$

also $\nu_2 = -\nu_1$ bei frei wählbarem ν_1 und damit

$$u_2 = \nu_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \nu_1 \in \mathbb{R}^*$$

Hieraus errechnet sich

$$w_2 = \nu_1 \frac{1}{\sqrt{3}} A u_2 = \nu_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}^T.$$

Die Lösungen des DGL-Systems (102) und damit des eigentlich interessierenden DGL-Systems (101) lassen sich nun angeben:

$$\begin{aligned} y_1 &= \nu_1 \cos(t) + \nu_2 \sin(t) + \nu_3 \cos(\sqrt{3}t) + \nu_4 \sin(\sqrt{3}t) \\ y_2 &= \nu_1 \cos(t) + \nu_2 \sin(t) - \nu_3 \cos(\sqrt{3}t) - \nu_4 \sin(\sqrt{3}t). \end{aligned} \quad (103)$$

Es ist interessant das Schwingungsverhalten der Massen für verschiedene Anfangsbedingungen zu betrachten:

- $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 1$: Die Masse m_1 ist anfangs in Ruhelage, die Masse m_2 nach rechts aus der Ruhelage ausgelenkt.

Man erhält das lineare Gleichungssystem

$$\nu_1 + \nu_3 = 0, \nu_1 - \nu_3 = 1$$

aus dem sich $\nu_1 = \frac{1}{2}$ und $\nu_3 = -\frac{1}{2}$ ergeben.

Die Koeffizienten ν_2 und ν_4 sind frei wählbar, was daran liegt, dass wir die Anfangswerte $z_3(0) = z'_1(0)$ und $z_4(0) = z'_2(0)$, also die Geschwindigkeiten der Massen, nicht vorgeben.

Das resultierende Schwingungsverhalten im Fall $\nu_2 = \nu_4 = 0$ ist in Abbildung 43 dargestellt: Der Graph von y_1 ist in roter Farbe, der von y_2 in blauer Farbe dargestellt.

Eine alternative, oft aussagekräftigere Darstellung erhält man, wenn man den Graphen der Lösungsfunktion

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (y_1(t), y_2(t))^T$$

darstellt. Dieser ist eine Kurve im \mathbb{R}^2 ; sie ist für $t \in [0, 300]$ in Abbildung 44 dargestellt.

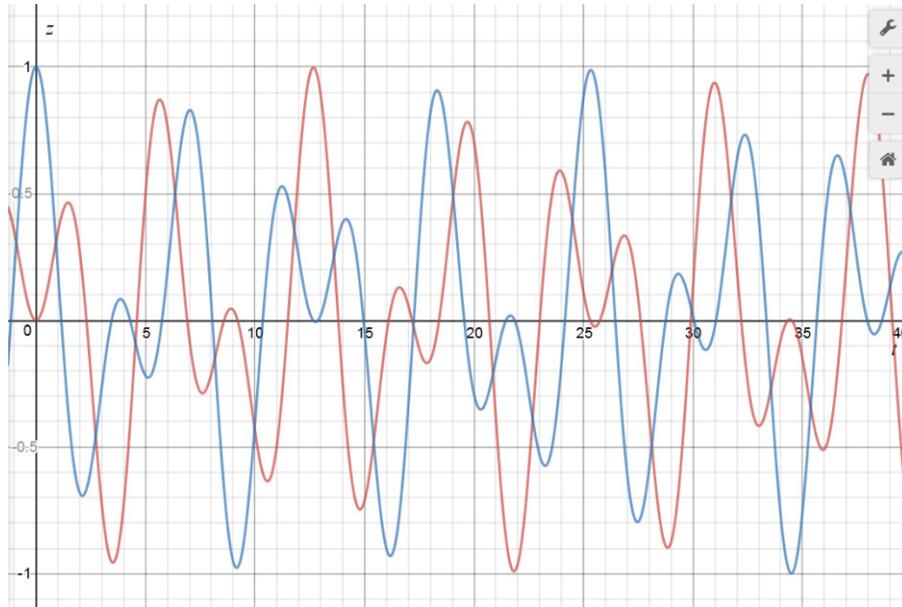


Abbildung 43: Lösungskomponenten eines Feder-Masse-Systems mit zwei gekoppelten Massen

Eigentümlicherweise ist keine der beiden Funktionen y_1, y_2 periodisch: Man betrachte etwa

$$y_1 = \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}t).$$

Es gelte $y_1(t+p) = y_1(t)$ für ein $p \in \mathbb{R} \setminus 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt auch $y_1''(t+p) = y_1''(t)$. Man erhält also das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \cos(t) - \cos(\sqrt{3}t) &= \cos(t+p) - \cos(\sqrt{3}(t+p)) \\ -\cos(t) + 3\cos(\sqrt{3}t) &= -\cos(t+p) + 3\cos(\sqrt{3}(t+p)). \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert $2\cos(\sqrt{3}t) = 2\cos(\sqrt{3}(t+p))$, also $p = \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$. Addition des 3-fachen der ersten Gleichung zur zweiten ergibt andererseits $2\cos(t) = 2\cos(t+p)$, also $p = 2\ell\pi$. Es folgt $\sqrt{3} = \frac{k}{\ell}$, ein Widerspruch.

- $y_1(0) = -1$ und $y_2(0) = 1$: Die Massen sind in entgegengesetzte Richtungen um den gleichen Betrag aus der Ruhelage ausgelenkt.

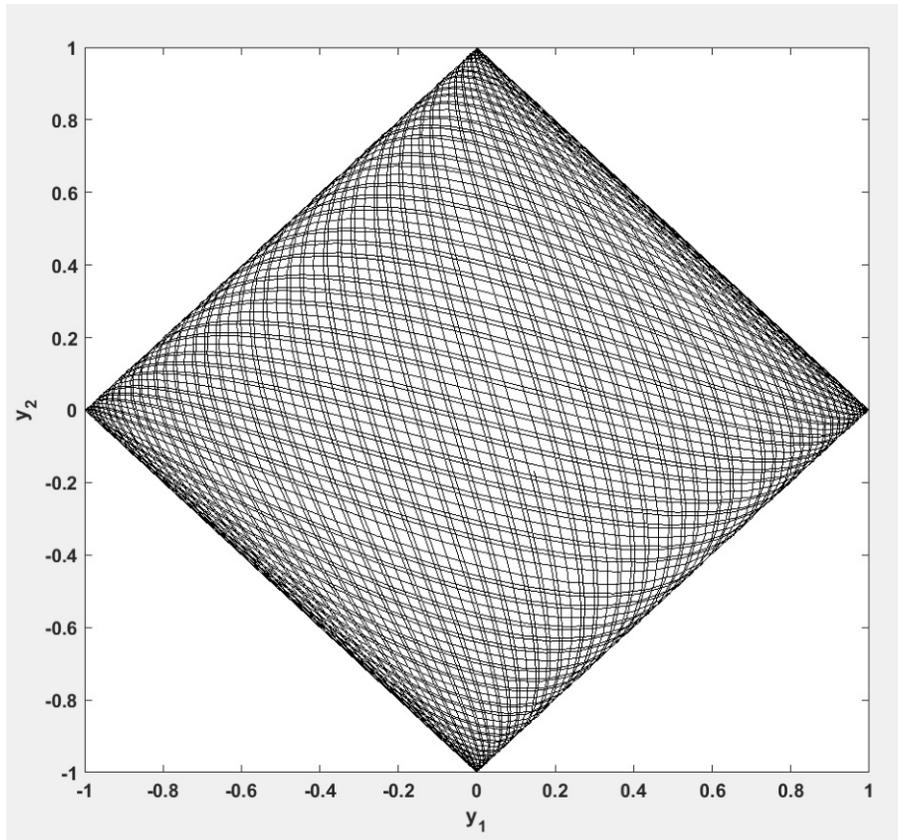


Abbildung 44: Trajektorie eines Feder-Masse-Systems mit zwei gekoppelten Massen

Man erhält das lineare Gleichungssystem

$$\nu_1 + \nu_3 = -1, \nu_1 - \nu_3 = 1$$

aus dem sich $\nu_1 = 0$ und $\nu_3 = -1$. Setzt man wieder $\nu_2 = \nu_4 = 0$, so ergeben sich harmonische Schwingungen der Massen:

$$y_1 = -\cos(\sqrt{3}t), y_2 = \cos(\sqrt{3}t).$$

◇

4.5 Kompartimentmodelle

Die quantitative Beschreibung eines sich zeitlich verändernden Systems ist eine Standardaufgabe in vielen Fachgebieten:

- Zeitliche Änderungen der Populationgrößen von Pflanzen- und Tierarten in einem abgegrenzten Ökosystem wie z.B. der Serengeti,
- Zeitliche Änderungen der Chemikalienmengen in einem Reaktor einer chemischen Produktionsanlage wie z.B. zur Herstellung von Insulin,
- Zeitliche Änderungen der Konzentration von Medikamenten und deren Abbauprodukten in einem Organismus wie z.B. die Verteilung eines Schmerzmittels im Körper nach der Einnahme oder Injektion.

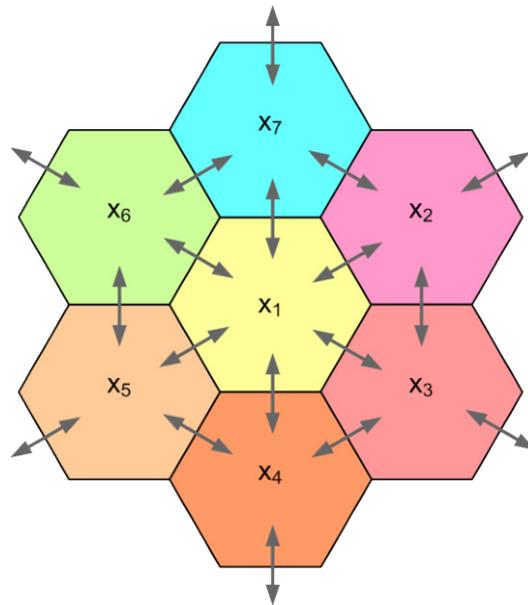


Abbildung 45: Schema eines Modells mit 7 Kompartments

Das jeweils betrachtete System wird dabei quantitativ durch eine Menge von zeitabhängigen Größen beschrieben, für deren Zeitverläufe man ein Modell erstellen möchte. Die Situation wird häufig dadurch sehr komplex, dass die Größen auch ortsabhängig sind: Das Vorkommen einer Pflanzenart

in einem Ökosystem kann nahe einer Wasserquelle höher sein als in trockenem Gelände, chemische Reaktionen verlaufen in einem Reaktor nicht räumlich homogen und Medikamente verteilen sich ungleichmäßig im Körper. Um dennoch zu einer näherungsweisen, quantitativen Beschreibung des betrachteten Systems zu kommen, unterteilt man dieses in endlich viele als »Kompartments« oder »Kompartimente« bezeichnete Bereiche, von denen man annimmt, dass die Größen in jedem Kompartiment räumlich homogen sind. Die Kompartments können dabei, müssen aber nicht notwendig, eine reale Bedeutung besitzen. In Abbildung 45 ist dies schematisch für ein Modell mit sieben Kompartments und einer Beschreibungsgröße dargestellt: Die Beschreibungsgröße ist in jedem der Kompartments räumlich homogen und liefert so zeitabhängige Größen x_i , $i \in \{1, \dots, 7\}$. Die zeitliche Änderung des Werts x_i der Beschreibungsgröße im Kompartiment i hängt sowohl von Gesetzmäßigkeiten innerhalb dieses Kompartments ab, als auch von Wechselwirkungen mit Nachbarkompartments, sowie möglicherweise mit der Umwelt des Systems. Im Schema 45 sind diese durch Pfeile dargestellt.

Das Arbeiten mit Kompartimentmodellen wird im Folgenden anhand eines Beispiels aus der Medizin dargestellt.

BEISPIEL 4.22 (PHARMAKOKINETIK VON PROPOFOL): Das im Weiteren geschilderte Beispiel beruht auf Informationen aus der Doktorarbeit [Wol] von Christina Fiona Wolf zum Thema »Pharmakokinetik und Pharmakodynamik von Propofol bei Wachkraniotomien« aus dem Jahr 2015.

Die *Pharmakokinetik* befasst sich mit der quantitativen Beschreibung des zeitlichen Verlaufs der Verteilung von Medikamenten im Körper. Ziel ist dabei Dosierungsvorschläge für das jeweilige Medikament zu erarbeiten, wobei Effekte wie die Ausscheidung des Medikaments aus dem Organismus, die Absorption durch Gewebe und den biochemischen Um-/Abbau (Metabolisierung) berücksichtigt werden.

Die Substanz *Propofol* (chem.: 2,6-Diisopropylphenol) ist ein schnell wirkendes, durch den Körper schnell abbaubares Schlafmittel, das zur Anwendung intravenös injiziert wird. Es wird von der Leber abgebaut und über die Nieren ausgeschieden. Propofol wird zusammen mit Schmerzmitteln zur Narkose während einer Operation eingesetzt. Die Substanz wirkt nicht schmerzlindernd.

Eine *Wachkraniotomie* ist ein chirurgischer Eingriff am Gehirn, während dem der Patient sich zeitweise im Wachzustand befindet. Während dieser Wachphasen wird durch neurologische Tests Gehirngewebe identifiziert, das

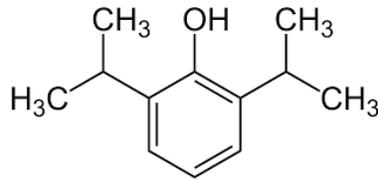


Abbildung 46: Strukturformel von Propofol

bei der Operation nicht entfernt/geschädigt werden sollte, weil dadurch z.B. Sprachstörungen entstehen könnten. Der Patient muss während solcher Test möglicherweise Fragen beantworten. Man beachte hierbei, dass das Gehirngewebe keine Schmerznerven besitzt. Es ist klar, dass zur Durchführung einer solchen Operation eine präzise, zeitabhängige Dosierung des Schlafmittels notwendig ist, um die Wachphasen steuern zu können. Dies geschieht unter Benutzung von programmierbaren Spritzenpumpen (Abbildung 47).



Abbildung 47: Spritzenpumpe

Um zu einem einfachen Modell für die Pharmakokinetik von Propofol zu kommen wird der menschliche Körper in drei Kompartments eingeteilt:

- Kompartiment 1 (sogenanntes »zentrales Kompartiment«): Blutplasma,
- Kompartiment 2: gut durchblutete Organe wie Gehirn, Herz, Leber, Lunge, Nieren,
- Kompartiment 3: mäßig durchblutete Körperteile wie Skelettmuskulatur und Fettgewebe.

Die im Kompartiment i zum Zeitpunkt t vorhandene Medikamentenmenge $x_i(t)$ lässt sich nicht direkt messen, wohl aber die Konzentration $c_i(t)$ des betreffenden Medikaments im Blutplasma. Um den Zusammenhang zwischen beiden Größen zu beschreiben verwendet man in der Pharmakokinetik sogenannte *Verteilungsvolumina* V_i ein: Grob gesprochen ist V_i die Menge an Blutplasma, aus der das Kompartiment i bestehen müsste, wenn es nur aus Blutplasma und nicht auch aus absorbierendem Gewebe bestünde. Es gilt dann die Beziehung

$$V_i := \frac{x_i(t)}{c_i(t)};$$

insbesondere hängt V_i nicht von der Zeit ab. Auf diese Weise kann man die praktisch messbare Größe c_i mit der theoretisch nützlicheren Größe x_i koppeln. Im Weiteren werden nur die x_i betrachtet.

Das injizierte Propofol verteilt sich zunächst im Kompartiment 1. Man bedenke dabei, dass das Herz die gesamte Blutmenge des Körpers in etwa einer Minute durch den Körper pumpt. In den beiden anderen Kompartiments wird das Medikament einerseits mit einer gewissen Rate ins Gewebe absorbiert, andererseits auch wieder mit einer anderen Rate ins Blut freigesetzt. Aus dem Kompartiment 1 wird außerdem Propofol über den Urin ausgeschieden. Das Szenario ist in Abbildung 48 dargestellt.

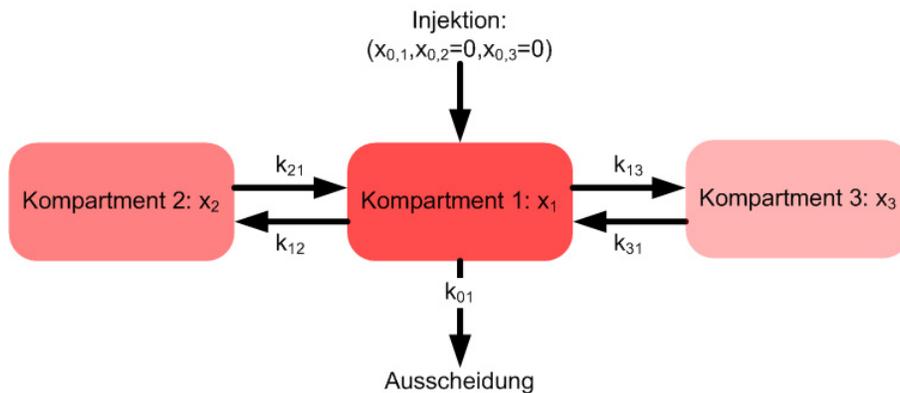


Abbildung 48: Kompartimentmodell für den Abbau von Propofol

Für die zeitlichen Änderungen der Propofolmengen x_i in den einzelnen

Kompartments ergibt sich das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}x_1' &= -(k_{10} + k_{12} + k_{13})x_1 + k_{21}x_2 + k_{31}x_3 \\x_2' &= k_{12}x_1 - k_{21}x_2 \\x_3' &= k_{13}x_1 - k_{31}x_3,\end{aligned}\tag{104}$$

wobei die Übergangparameter k_{ij} in der oben genannten Doktorarbeit mit folgenden Werten tabelliert sind:

Parameter	Wert (min^{-1})
k_{10}	0.119
k_{12}	0.114
k_{13}	0.0419
k_{21}	0.055
k_{31}	0.0033

Als charakteristisches Polynom der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -(k_{10} + k_{12} + k_{13}) & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & -k_{21} & 0 \\ k_{13} & 0 & -k_{31} \end{pmatrix}$$

von (104) ergibt sich damit zum Beispiel durch Anwenden der Sarrus'schen Regel:

$$\begin{aligned}\chi_A &= (X + k_{12} + k_{13} + k_{10})(X + k_{21})(X + k_{31}) - k_{13}k_{31}(X + k_{21}) - k_{12}k_{21}(X + k_{31}) \\ &= (X + 0.2749)(X + 0.055)(X + 0.0033) - 0.00013827(X + 0.055) - 0.00627(X + 0.0033).\end{aligned}$$

Numerisch (Intervallhalbierung z.B. in Matlab mit `fzero`) ermittelt man folgende drei reellen Nullstellen von χ :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.300866331198869 \\ \lambda_2 &= -0.029935597632274 \\ \lambda_3 &= -0.002398071168857,\end{aligned}$$

die Matrix A ist also reell diagonalisierbar.

Die Eigenvektoren lassen sich aus den letzten beiden Gleichungen dieses Systems bestimmen: Es muss gelten

$$k_{12}x_1 - k_{21}x_2 = \lambda x_2, \quad k_{13}x_1 - k_{31}x_2 = \lambda x_3$$

also

$$x_2 = \frac{k_{12}}{\lambda + k_{21}}x_1, \quad x_3 = \frac{k_{13}}{\lambda + k_{31}}x_1$$

mit x_1 als wählbarem Parameter und λ als jeweils betrachtetem Eigenwert. Konkret liefert dies die normierten Eigenvektoren

$$\begin{aligned} v_1 &= (-0.899910364406433, 0.417258357588431, 0.126715425487535)^T \\ v_2 &= (0.203440928075602, 0.925306953677140, -0.320029420929497)^T \\ v_3 &= (0.021497393357464, 0.046589600366515, 0.998682768058267)^T \end{aligned}$$

Die Lösungen des DGL-Systems sind durch

$$x(t) = \alpha_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha_3 v_3 e^{\lambda_3 t}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

gegeben. Man beachte, dass wegen der Negativität aller Eigenwerte für jede Lösung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

gilt. Dies entspricht der Tatsache, dass bei einmaliger Zufuhr von Propofol dieses nach endlicher Zeit aus dem Organismus ausgeschieden wird. Da der Betrag der Eigenwerte die Geschwindigkeit, mit der das Propofol aus dem jeweiligen Kompartiment ausgeschieden wird, festlegt, liest man unmittelbar ab, dass Propofol am längsten im Kompartiment 3 verbleibt, während es recht schnell aus dem Kompartiment 1 verschwindet.

Um einen typischen Zeitverlauf der Propofolmenge zu berechnen, benötigt man Anfangswerte für den Zeitpunkt $t_0 := 0$ einer Injektion des Medikaments. Da Propofol direkt in die Blutbahn gegeben wird, ist bei erstmaliger Verabreichung

$$x_{0,2} = x_2(0) = 0, \quad x_{0,3} = x_3(0) = 0.$$

Eine typische Injektionsdosis zur Einleitung einer Narkose beträgt 30 mg. Der zugehörige, mit dem Modell (104) ermittelte Zeitverlauf der Propofolmengen in den drei Kompartiments ist in Abbildung 49 dargestellt.

Während einer Operation wird Propofol entweder über eine Spritzenpumpe mit möglicherweise unterschiedlichen Raten zugeführt, oder es erfolgen in einem gewissen zeitlichen Abstand weitere Injektionen. Die Abbildung 50 zeigt einen mit dem Modell (104) ermittelten zeitlichen Verlauf der Propofolmengen, wenn 30 Minuten nach der ersten Injektion eine zweite derselben Dosis erfolgt. \diamond

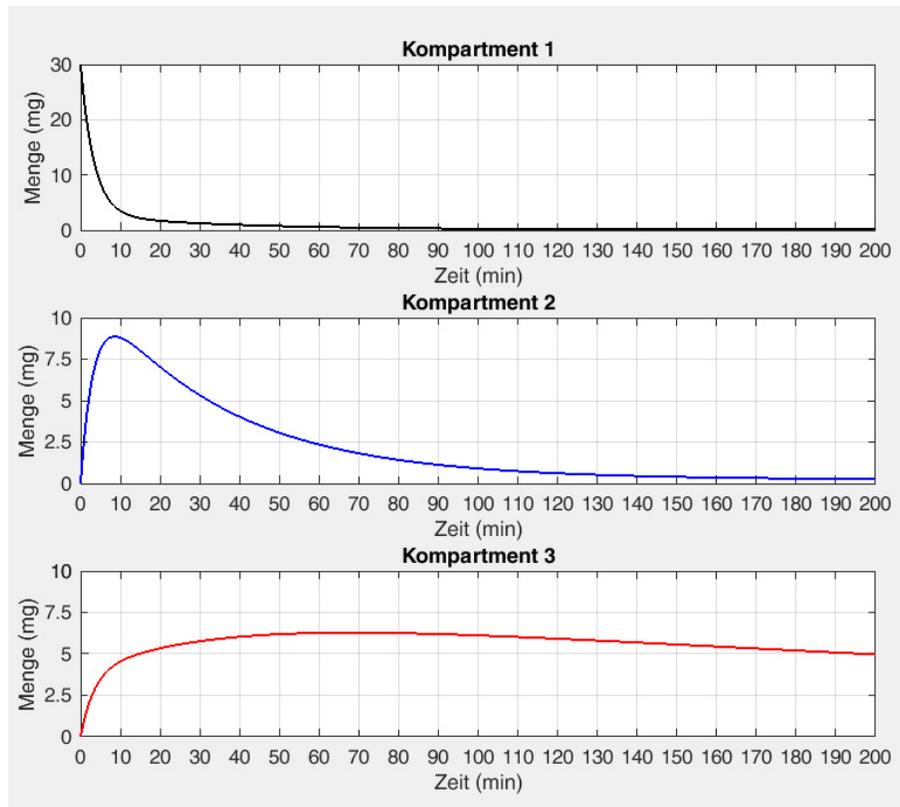


Abbildung 49: Modellzeitverläufe für den Propofolabbau nach Injektion

4.6 Dynamische Systeme

Die Lösungen von allgemeinen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung (77) können im Allgemeinen nur numerisch »bestimmt« werden. Zur Absicherung der Numerik sind also zunächst Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu machen. Die Existenz und Eindeutigkeitsaussagen von Picard-Lindelöf aus Abschnitt 2.6 lassen sich durch konsequentes Arbeiten im \mathbb{R}^n direkt auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung übertragen. Dies wird in der Vorlesung nicht durchgeführt. Man lese hierzu das Kapitel IX von [Heu]. Im Folgenden wird die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf ohne Beweis dargestellt.

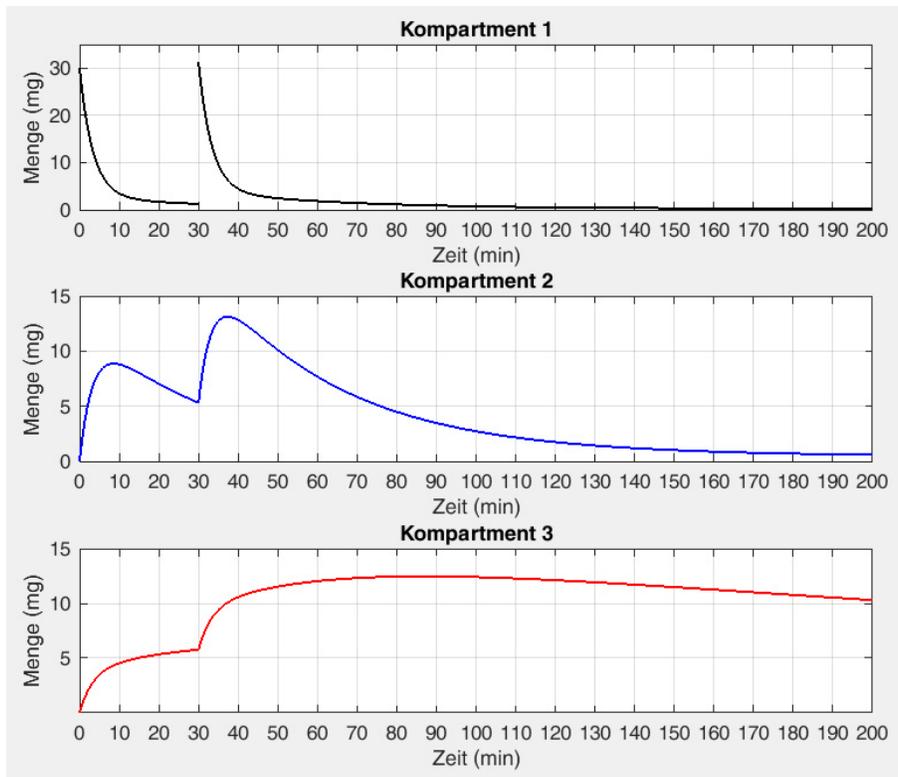


Abbildung 50: Modellzeitverläufe für den Propofolabbau bei zweimaliger Injektion

- Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Eine Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$$

erfüllt die Lipschitz-Bedingung bezüglich der Variablen x , falls eine Konstante $L > 0$ existiert, für die gilt:

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in D \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

Hierbei ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^n .

- Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfüllt die lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich x , falls es zu jedem $(t, x) \in D$ eine offene Kugel $B((t, x), r)$ gibt, sodass f auf der Menge $B((t, x), r) \cap D$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt.

- Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitze einen offenen Definitionsbereich D und stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, dann besitzt f die lokale Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x .

SATZ 4.23: Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ besitze die lokale Lipschitz-Eigenschaft bezüglich x . Dann besitzt jedes AWP

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

eine eindeutige Lösung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

BEMERKUNG: Es ist hier wesentlich und nicht wie früher nur eine vereinfachende Voraussetzung, dass der Definitionsbereich einer Lösung nach Definition ein Intervall ist.

Die Modellierung mit Differentialgleichungen erfordert nicht immer die Verwendung des erhaltenen Modells zur Simulation oder Prognose (siehe Abschnitt 2.4), sondern häufig ist man an qualitativen Eigenschaften des Modells beziehungsweise seiner Lösungen interessiert, die Rückschlüsse auf den modellierten Teil der Realität zulassen. Was hier konkret gemeint sein kann, zeigt eine Diskussion des früher eingeführten Räuber-Beute-Modells (76) von Lotka-Volterra.

BEISPIEL 4.24 (EIGENSCHAFTEN DES LOTKA-VOLTERRA-MODELLS): Wie betrachten erneut das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'_B &= \alpha_B x_B - \beta_B x_B x_R \\ x'_R &= -\alpha_R x_R + \beta_R x_B x_R \end{aligned}$$

für die Kopplung der zeitlichen Entwicklung der Population x_B der Beutearart mit der Population x_R der Räuberart. Die vorkommenden Koeffizienten sind sämtlich positiv.

Eine aus ökologischer Sicht naheliegende Frage ist: Stellt sich in dem betrachteten Ökosystem nach einiger Zeit ein stabiler Zustand ein? Ein solcher stabiler Zustand ist durch Populationsgrößen x_B^* und x_R^* gegeben, für welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_B x_B^* - \beta_B x_B^* x_R^* \\ 0 &= -\alpha_R x_R^* + \beta_R x_B^* x_R^*. \end{aligned}$$

gelten. Es folgt

$$x_B^* = \frac{\alpha_R}{\beta_R}, \quad x_R^* = \frac{\alpha_B}{\beta_B}.$$

Satz 4.23 sagt uns, dass jedes AWP für das Lotka-Volterra-System eine eindeutige Lösung besitzt. Hieraus kann man folgern, dass Lösungen des Lotka-Volterra-Systems den obigen stabilen Zustand nicht nach endlicher Zeit annehmen, sondern entweder konstant die obigen Werte besitzen oder sich diesen Werten im Limes $t \rightarrow \infty$ annähern. Ob der zweite Fall tatsächlich eintritt, ist beim vorliegenden Stand der Diskussion offen.

Da die Nullfunktionen $x_B = 0$ und $x_R = 0$ eine Lösung des Lotka-Volterra-Systems sind, kann man mit demselben Argument zeigen, dass nicht-konstante Lösungen keine Nullstellen besitzen. Wir wollen nun solche Lösungen $x_B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genauer untersuchen und fassen diese entsprechend der früher bereits verwendeten, vektorwertigen Betrachtungsweise zu einer Funktion

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_B(t), x_R(t))^T$$

zusammen. Der Graph von x ist dann eine Kurve in der Ebene.

Zu jedem Zeitpunkt t_1 mit der Eigenschaft $x'_B(t_1) \neq 0$ gibt es nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit ein offenes Intervall I_1 derart, dass $x_B(I_1) =: J_1$ ein offenes Intervall und die Einschränkung $x_B|_{I_1}$ bijektiv mit differenzierbarer Umkehrabbildung ist. Damit kann man die differenzierbare Funktion

$$r : J_1 \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto x_R(x_B^{-1}(u)) \quad (105)$$

definieren, die die Größe der Räuberpopulation als Funktion der Größe der Beutepopulation darstellt, aber eben nur im Intervall J_1 . Nach Definition stimmt der Graph von r mit dem Graphen von x im Intervall I_1 überein.

Für die Ableitung von r gilt nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{du} &= x'_R(x_B^{-1}(u)) \cdot \frac{1}{x'_B(x_B^{-1}(u))} \\ &= \frac{-\alpha_R x_R(x_B^{-1}(u)) + \beta_R x_B(x_B^{-1}(u)) x_R(x_B^{-1}(u))}{\alpha_B x_B(x_B^{-1}(u)) - \beta_B x_B(x_B^{-1}(u)) x_R(x_B^{-1}(u))} \\ &= \frac{-\alpha_R r(u) + \beta_R u r(u)}{\alpha_B u - \beta_B u r(u)} \\ &= \frac{-\alpha_R + \beta_R u}{u} \frac{r(u)}{\alpha_B - \beta_B r(u)}, \end{aligned}$$

das heißt r löst eine Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Variablen. Damit kann man r nach dem Verfahren 2.12 bestimmen: Für beliebiges $u_1 \in J_1$ ist

$$\begin{aligned} G(u) &:= \int_{u_1}^u \frac{-\alpha_R + \beta_R \mu}{\mu} d\mu \\ &= -\alpha_R (\ln(u) - \ln(u_1)) + \beta_R (u - u_1). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \int_{r_1}^{\xi} \frac{\alpha_B - \beta_B \rho}{\rho} d\rho \\ &= \alpha_B (\ln(\xi) - \ln(r_1)) - \beta_B (\xi - r_1), \end{aligned}$$

wobei $r_1 := r(u_1)$.

Gleichsetzen und auflösen nach ξ liefert:

$$\begin{aligned} \alpha_B (\ln(\xi) - \ln(r_1)) - \beta_B (\xi - r_1) &= -\alpha_R (\ln(u) - \ln(u_1)) + \beta_R (u - u_1) \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\xi^{\alpha_B}}{e^{\beta_B \xi}}\right) - \ln\left(\frac{r_1^{\alpha_B}}{e^{\beta_B r_1}}\right) &= \ln\left(\frac{e^{\beta_R u}}{u^{\alpha_R}}\right) - \ln\left(\frac{e^{\beta_R u_1}}{u_1^{\alpha_R}}\right) \end{aligned}$$

Damit gilt für die Funktion r :

$$\frac{r(u)^{\alpha_B} u^{\alpha_R}}{e^{\beta_B r(u)} e^{\beta_R u}} = C$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Drückt man diese Gleichung mit Hilfe der Funktionen x_B und x_R aus, so ergibt sich:

$$\forall t \in I_1 \quad \frac{x_R(t)^{\alpha_B} x_B(t)^{\alpha_R}}{e^{\beta_B x_R(t)} e^{\beta_R x_B(t)}} = C. \quad (106)$$

In der bisherigen Analyse ist I_1 jeweils ein geeignetes offenes Intervall, das einen Punkt t_1 mit $x'_B(t_1) \neq 0$ enthält. Ist diese Bedingung für ein $t_1 \in \mathbb{R}$ nicht erfüllt, so gilt aber $x'_R(t_1) \neq 0$, da x nach Voraussetzung nicht konstant ist, und man kann die obigen Rechnungen mit vertauschten Rollen von x_B und x_R durchführen. Bemerkenswerterweise ergibt sich dann ebenfalls die Gleichung (106). Man folgert also:

FESTSTELLUNG 4.25: *Die Graphen der Lösungen $x = (x_B, x_R)^T$ des Lotka-Volterra-Systems sind genau diejenigen ebenen Kurven, die in jedem Punkt die Bedingung*

$$\frac{x_R(t)^{\alpha_B} x_B(t)^{\alpha_R}}{e^{\beta_B x_R(t)} e^{\beta_R x_B(t)}} = C$$

mit einer nur von x abhängigen Konstanten $C > 0$ erfüllen.

Aus dieser Feststellung folgt sofort: Eine nicht konstante Lösung nähert sich im Lauf der Zeit *nicht* dem konstanten Zustand an. Andernfalls wäre nämlich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left(\frac{\alpha_R}{\beta_R}, \frac{\alpha_B}{\beta_B} \right)^T$$

und damit durch Grenzübergang

$$C = \frac{\left(\frac{\alpha_R}{\beta_R}\right)^{\alpha_B} \left(\frac{\alpha_B}{\beta_B}\right)^{\alpha_R}}{e^{\alpha_R} e^{\beta_R}},$$

das heißt das System hätte nur eine einzige Lösung, was der Lösbarkeitsaussage für AWP's widerspricht.

Im Weiteren werden wir die geometrische Form der Lösungsgraphen ermitteln. Gemäß der letzten Feststellung handelt es sich um die Niveaulinien der Funktion

$$\ell : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (x_B, x_R) \mapsto \frac{x_R^{\alpha_B} x_B^{\alpha_R}}{e^{\beta_B x_R} e^{\beta_R x_B}},$$

die in Abbildung 51 dargestellt sind.

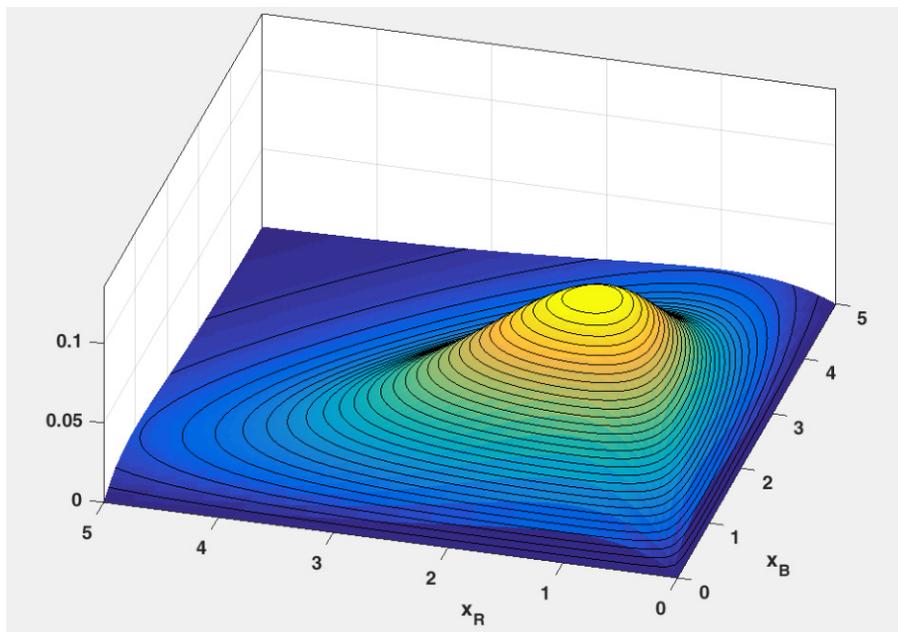


Abbildung 51: Graph der Funktion ℓ mit Niveaulinien $\ell(x_B, x_R) = C$

Grundlage für eine präzise Analyse dieser Niveaulinien sind die Graphen der in der Definition von ℓ auftretenden Funktionen der Form

$$g(s) = \frac{s^\alpha}{e^{\beta s}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Zunächst gilt $g(0) = 0$ und

$$g'(s) = \frac{\alpha s^{\alpha-1} e^{\beta s} - \beta s^{\alpha} e^{\beta s}}{e^{2\beta s}},$$

womit die Funktion g' bei $s_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ eine Nullstelle besitzt. Man erkennt leicht, dass es sich um ein Maximum von g handelt; der Funktionswert ist

$$g\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\alpha} =: M(\alpha, \beta).$$

Da auch $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$ gilt, ergibt sich die in Abbildung 52 dargestellte Form der Funktionsgraphen.

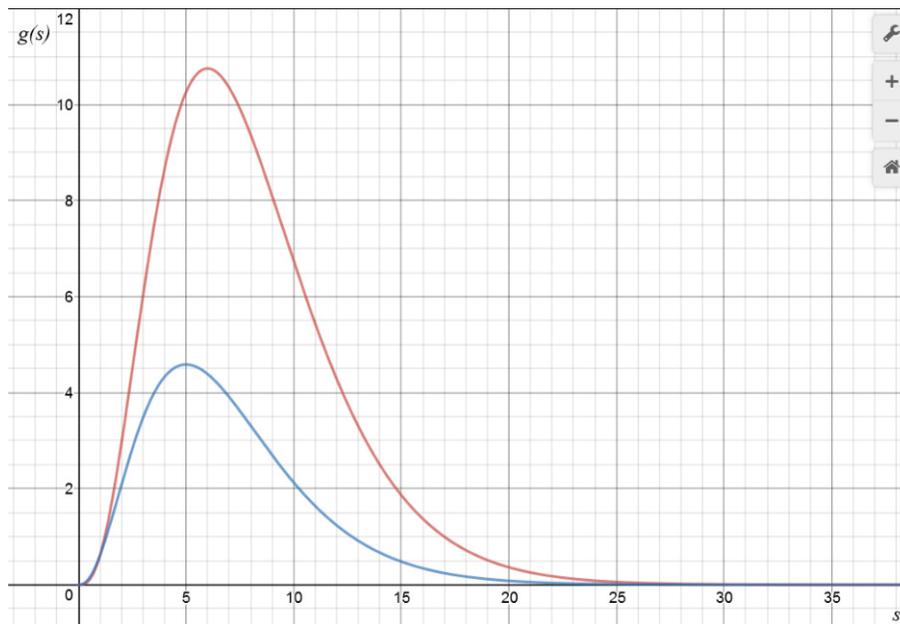


Abbildung 52: Graphen der Funktion g
(rot: $\alpha = 3$, $\beta = 0.5$, blau: $\alpha = 2.5$, $\beta = 0.5$)

Man kann nun ein Resultat der mathematischen Biologie/Ökologie beweisen:

SATZ 4.26 (siehe Abbildung 54): *Die Graphen der Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Lotka-Volterra-Systems (76) sind im Fall einer Anfangsbedingung $x_B(t_0) > 0$ und $x_R(t_0) > 0$ geschlossene, im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems mit der Abszisse x_B und der Ordinate x_R verlaufende Kurven, die im Gegenuhrzeigersinn um den Punkt $(\frac{\alpha_R}{\beta_R}, \frac{\alpha_B}{\beta_B})$ herumlaufen. Insbesondere sind die Lösungen des Lotka-Volterra-Systems in diesem Fall periodisch.*

BEWEIS: Es sei x eine Lösung und $C > 0$ die gemäß Feststellung 4.25 zugehörige Konstante. Man betrachtet die Gleichung

$$C = \frac{s_1^{\alpha_B}}{e^{\beta_B s_1}} \frac{s_2^{\alpha_R}}{e^{\beta_R s_2}} =: g_1(s_1)g_2(s_2).$$

Es muss $C \leq M(\alpha_B, \beta_B)M(\alpha_R, \beta_R)$ gelten, da sonst

$$g_1(s_1) = \frac{C}{g_2(s_2)} > \frac{M(\alpha_B, \beta_B)M(\alpha_R, \beta_R)}{g_2(s_2)} > M(\alpha_B, \beta_B)$$

folgt, also keine Lösung existiert.

Ist $C = M(\alpha_B, \beta_B)M(\alpha_R, \beta_R)$, so gibt es offensichtlich genau eine Lösung der Gleichung, nämlich $s_1 = \frac{\alpha_B}{\beta_B}$ und $s_2 = \frac{\alpha_R}{\beta_R}$.

Es sei nun $C < M(\alpha_B, \beta_B)M(\alpha_R, \beta_R)$, also $C = \mu M(\alpha_R, \beta_R)$ mit einem Faktor $\mu \in (0, M(\alpha_B, \beta_B))$.

Die Gleichung $g_1(s_1) = \mu$ besitzt dann zwei Lösungen $\sigma_1 < \sigma_2$ und für diese gilt:

- $\frac{\alpha_B}{\beta_B} \in [\sigma_1, \sigma_2]$,
- $\forall s_1 \notin [\sigma_1, \sigma_2] \quad \frac{\mu}{g_1(s_1)} > 1$,
- $\forall s_1 \in (\sigma_1, \sigma_2) \quad \frac{\mu}{g_1(s_1)} < 1$.

Es folgt:

- Für $s_1 \notin [\sigma_1, \sigma_2]$ besitzt die Gleichung $g_1(s_1)g_2(s_2) = \mu M(\alpha_R, \beta_R)$ keine Lösung s_2 .

- Für $s_1 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ besitzt die Gleichung $g_1(s_1)g_2(s_2) = \mu M(\alpha_R, \beta_R)$ genau zwei Lösungen $\tau_1 < \tau_2$ und diese besitzen die Eigenschaft $\frac{\alpha_R}{\beta_R} \in [\tau_1, \tau_2]$.
- Für $s_1 = \sigma_1$ oder $s_1 = \sigma_2$ besitzt die Gleichung $g_1(s_1)g_2(s_2) = \mu M(\alpha_R, \beta_R)$ jeweils die einzige Lösung $s_2 = \frac{\alpha_R}{\beta_R}$.

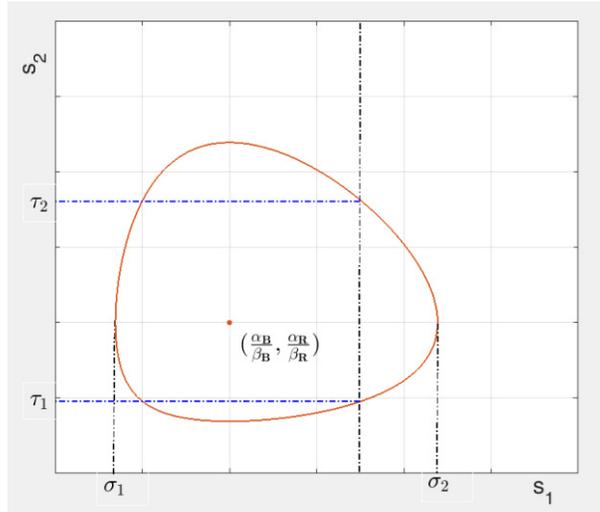


Abbildung 53: Zum Beweis von Satz 4.26

Der Graph der Lösung x liegt also in dem Rechteck $[\sigma_1, \sigma_2] \times [0, M(\alpha_R, \beta_R)]$ und jede Parallele zur Ordinate durch ein $s_1 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ schneidet den Graphen zweimal, während am linken und rechten Rand des Rechtecks nur ein Schnittpunkt vorliegt. Dies beweist die Behauptungen über den Graphen bis auf die Aussage zum Umlauf der Lösungskurven mit wachsendem t . Diese überprüft man durch Berechnen des Tangentialvektors $x'(t)$ und Berücksichtigen der verschiedenen Positionen von $x(t)$ relativ zum Gleichgewichtspunkt $(\frac{\alpha_R}{\beta_R}, \frac{\alpha_B}{\beta_B})$. Anstatt die verschiedenen Fälle vollständig zu behandeln, wird nur der Fall $\gg x(t)$ liegt oberhalb und rechts von $(\frac{\alpha_R}{\beta_R}, \frac{\alpha_B}{\beta_B}) \ll$ untersucht. Hier gilt also:

$$x_B(t) > \frac{\alpha_R}{\beta_R}, \quad x_R(t) > \frac{\alpha_B}{\beta_B}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x'_B(t) &= \alpha_B x_B(t) - \beta_B x_B(t) x_R(t) \\ &= x_B(t) (\alpha_B - \beta_B x_R(t)) < 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x'_R(t) &= -\alpha_R x_R(t) + \beta_R x_B(t) x_R(t) \\ &= x_R(t)(-\alpha_R + \beta_R x_B(t)) > 0, \end{aligned}$$

was der Behauptung über den Umlaufssinn entspricht. \square

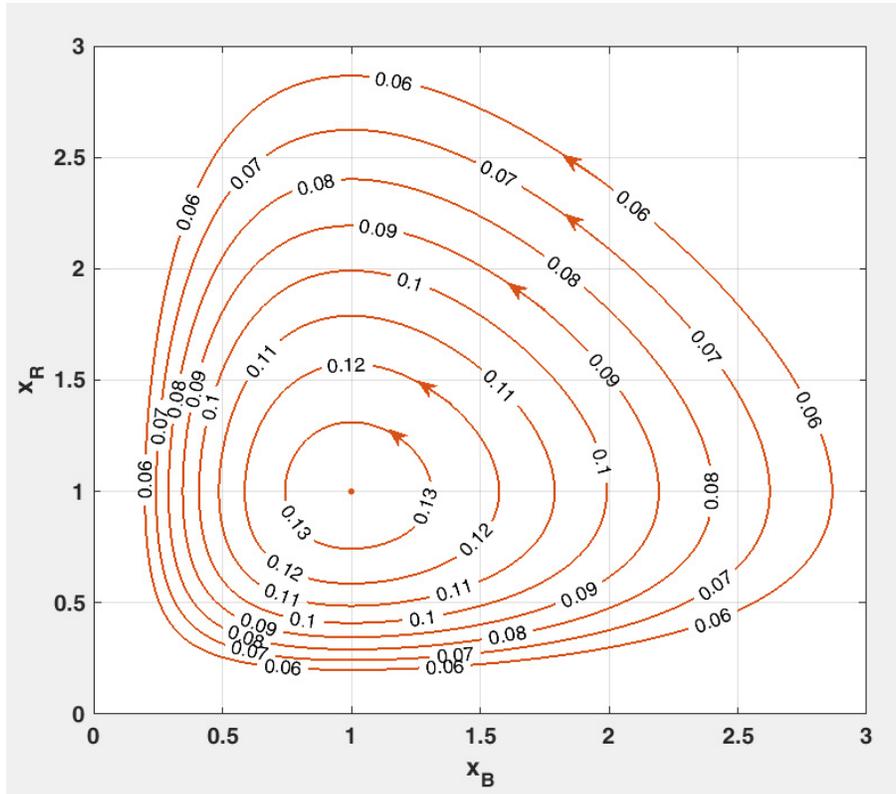


Abbildung 54: Trajektorien des Lotka-Volterra-Systems
mit $\alpha_B = \beta_B = 1$ und $\alpha_R = \beta_R = 1$

Die Abbildung 54 zeigt die Graphen von Lösungskurven des Lotka-Volterra-Systems mit den Parametern $\alpha_B = \beta_B = 1$ und $\alpha_R = \beta_R = 1$ zu verschiedenen Konstanten C . Man beachte, dass der Gleichgewichtspunkt bei $(1, 1)$ liegt und dass

$$C \leq M(1, 1)M(1, 1) = e^{-1}e^{-1} \approx 0,135$$

gilt. Die Darstellung lässt interessante Schlussfolgerungen zu: Ist, wie im Beispiel der Spinn- und Raubmilben, die Beuteart ein Schädling, so wird man

möglichweise versuchen die Populationsgröße durch Einsatz von Giften zu vermindern. Führt man eine solche Bekämpfungsmaßnahme zu einem Zeitpunkt t durch, zu dem sich die Population x_B nahe ihres Minimums befindet (links vom Gleichgewichtspunkt), und schadet die Maßnahme den Räubern nicht, so wird der Zustand des Räuber-Beute-Systems auf eine Kurve mit kleinerem C -Wert gesetzt. Damit hat man die paradoxe Wirkung, dass das Maximum der Schädlingspopulation durch die Maßnahme größer wird! Man muss die Maßnahme also zum, richtigen Zeitpunkt durchführen, nämlich wenn die Schädlingspopulation am größten ist. Ähnliches gilt für die ökologische Schädlingsbekämpfung durch Erhöhung der Räuberzahl: Sie sollte durchgeführt werden, wenn die Räuberpopulation nahe ihres Minimums ist. \diamond

Wie wir im Lauf der Vorlesung mehrfach gesehen haben, kann man (Systeme von) Differentialgleichungen zur Beschreibung der zeitlichen Änderungen eines biologischen, physikalischen oder chemischen Systems nutzen. Man bezeichnet solche Systeme auch als »dynamische Systeme« und kann diesen Begriff mathematisch präzise fassen: Um das Verhalten eines zeitlich sich ändernden Systems zu beschreiben, sind zwei Dinge festzulegen:

- der Bereich $T \subseteq \mathbb{R}$ der Zeiten, zu denen man das System betrachtet,
- die Menge Z der möglichen Systemzustände.

Für den Zeitbereich T werden üblicherweise die folgenden Fälle unterschieden:

- diskrete Zeit: $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = \mathbb{Z}$ je nachdem, ob man das System ausschließlich ab einem bestimmten Zeitpunkt betrachten will/kann, oder ob das System eine beliebig lange Vergangenheit besitzt.
- kontinuierliche Zeit: $T = \mathbb{R}^{\geq 0}$ oder $T = \mathbb{R}$ mit der gleichen Unterscheidung wie in diskreter Zeit.

Die Menge Z der Systemzustände kann prinzipiell eine beliebige Menge sein. Da man jedoch Aussagen über das Ausmaß von Zustandsänderungen machen möchte, setzt man mindestens voraus, dass auf Z eine Metrik d gegeben ist.

Die mathematische Theorie der dynamischen Systeme geht von einem deterministischen Grundprinzip aus: Kennt man den Systemzustand z zu einem bestimmten Zeitpunkt t , so ist der Systemzustand zu jedem Zeitpunkt $t' > t$ eindeutig festgelegt. Dies führt zu folgender mathematischen Definition:

DEFINITION 4.27: Ein dynamisches System ist ein Tripel $\mathcal{S} = (T, (Z, d), \Phi)$ bestehend aus einer Menge T , dem Zeitbereich (siehe oben), einem metrischen Raum (Z, d) , dem Zustands- oder Phasenraum (siehe oben) und einer Abbildung

$$\Phi : T \times Z \rightarrow Z$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall z \in Z \quad \Phi(0, z) = z.$
2. $\forall t, s \in T, z \in Z \quad \Phi(t + s, z) = \Phi(s, \Phi(t, z)).$

Die Abbildung Φ bezeichnet man als Fluss des dynamischen Systems \mathcal{S} .

Die Abbildung Φ ist dabei so zu interpretieren: Besitzt das System zu einem bestimmten Zeitpunkt den Zustand $z \in Z$, so nimmt das System nach der Zeitspanne t den Zustand $\Phi(t, z)$ an. Das erklärt insbesondere, weshalb die Eigenschaft 2 für die Abbildung Φ gefordert wird: Der aus z nach der Zeitspanne $t+s$ resultierende Zustand $\Phi(t+s, z)$ ist derselbe, wie der aus dem Zustand $\Phi(t, z)$ nach der Zeitspanne s resultierende Zustand $\Phi(s, \Phi(t, z))$ – eine anschaulich naheliegende Forderung. Weitere Begriffe drängen sich nun auf:

DEFINITION 4.28: Zu jedem Zustand $z_0 \in Z$ eines dynamischen Systems \mathcal{S} kann man die Menge

$$T(z_0) := \{z \in Z : \exists t \in T \ z = \Phi(t, z_0)\}$$

bilden. Sie wird als Orbit oder Trajektorie von z_0 bezeichnet.

Ein Zustand z^* mit der Eigenschaft

$$T(z^*) = \{z^*\}$$

heißt Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems \mathcal{S} .

Das deterministische Grundprinzip spiegelt sich im Verhalten der Trajektorien wider:

FESTSTELLUNG 4.29: *Für die Trajektorien eines dynamischen Systems \mathcal{S} gilt:*

$$T_1 \neq T_2 \Leftrightarrow T_1 \cap T_2 = \emptyset.$$

BEWEIS: Es gelte $z \in T_1 \cap T_2$ und $T_1 = T(z_1)$ für ein $z_1 \in Z$. Dann existiert ein $t_1 \in T$ mit $\Phi(t_1, z_1) = z$. Daher gilt für jedes $s \in T$:

$$\Phi(s, z) = \Phi(s, \Phi(t_1, z_1)) = \Phi(s + t_1, z_1),$$

woraus $T(z) \subseteq T_1$ folgt. Andererseits gilt für jedes $t \in T$ auch

$$\Phi(t, z_1) = \Phi(t - t_1 + t_1, z_1) = \Phi(t - t_1, \Phi(t_1, z_1)) = \Phi(t - t_1, z),$$

woraus $T_1 \subseteq T(z)$ folgt. Da man dieselbe Argumentation mit T_2 durchführen kann, ergibt sich insgesamt $T_1 = T(z) = T_2$. \square

Der Zusammenhang zwischen dynamischen Systemen und Differentialgleichungssystemen wird hergestellt durch die

FESTSTELLUNG 4.30: *Es seien*

- $I = \mathbb{R}^{\geq 0}$ oder $I = \mathbb{R}$,
- $Z \subseteq \mathbb{R}^n$, d_2 die euklidische Metrik auf Z ,
- $f : \mathbb{R} \times Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion für die jedes AWP

$$x' = f(x), \quad f(t_0) = x_0$$

eine eindeutige Lösung $x(\cdot; t_0, x_0) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt.

Dann bildet das Tripel $(I, (Z, d_2), \Phi)$ mit

$$\Phi(t, z) := x(t; 0, z)$$

ein dynamisches System, dessen Trajektorien die Graphen

$$\{x(t; 0, z) : t \in I\}, \quad z \in Z$$

und dessen Gleichgewichtspunkte daher

$$\{z^* \in Z : f(z^*) = 0\}$$

sind.

BEWEIS: Es sind die beiden Eigenschaften für die potentielle Flussbildung Φ nachzuweisen. Zunächst gilt nach Definition für jedes $z \in D$:

$$\Phi(0, z) = x(0; 0, z) = z.$$

Es seien nun $s, t \in I$ und $z \in D$: Die Lösung $x(\cdot; 0, z)$ des AWP $x(0) = z$ ist eindeutig bestimmt und nimmt an der Stelle t den Wert $x(t; 0, z)$ an. Also ist die Funktion

$$x(s) := x(t + s; 0, z)$$

die eindeutige Lösung des AWP $x(0) = x(t; 0, z)$. Diese Funktion ist aber nach Definition von Φ gerade $x(\cdot; 0, x(t; 0, z))$, womit die zweite Flussbedingung erfüllt ist.

Die verbleibenden Aussagen sind klar. \square

Betrachtet man das Beispiel ökologischer Systeme, in denen verschiedene Pflanzen- und Tierarten koexistieren, so ist es offensichtlich interessant nach dem Verhalten eines dynamischen Systems »nahe« bei einem Gleichgewichtspunkt zu fragen: Führt eine kleinere Schwankung in der Populationsgröße einer Art zu wesentlichen Änderungen des Systems oder bleibt dieses im Gleichgewicht? Solche Fragen bilden die Motivation für eine Klassifikation von Gleichgewichtspunkten:

DEFINITION 4.31: *Es sei $z^* \in Z$ ein Gleichgewichtspunkt des dynamischen Systems \mathcal{S} .*

- z^* heißt stabil, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$d(\Phi(t_0, z), z^*) < \delta \Rightarrow \forall t \geq t_0 \ d(\Phi(t, z), z^*) < \epsilon.$$

- z^* heißt asymptotisch stabil, falls z^* stabil ist und es eine Konstante $R > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt:

$$d(\Phi(t_0, z), z^*) < R \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, z) = z^*.$$

- z^* heißt instabil, falls z^* nicht stabil ist.

Salopp ausgedrückt gilt: Trajektorien, die einen Punkt in der Nähe eines stabilen Gleichgewichtspunktes durchlaufen, bleiben danach in der Nähe dieses Gleichgewichtspunktes. Trajektorien, die einen Punkt in der Nähe eines

asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunktes durchlaufen, laufen auf diesen Punkt zu.

KLASSIFIKATION 2-DIMENSIONALER LINEARER, DYNAMISCHER SYSTEME

Um die eingeführten Begriffe mit Leben zu füllen, werden im Folgenden lineare Differentialgleichungssysteme

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (107)$$

diskutiert. Nach Satz 4.10 und Feststellung 4.30 kann ein solches System als dynamisches System \mathcal{S}_A aufgefasst werden, wobei der Phasenraum gleich \mathbb{R}^2 ist. Man spricht daher auch von *2-dimensionalen, linearen dynamischen Systemen*. Die Menge der Gleichgewichtspunkte von \mathcal{S}_A ist

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = 0\},$$

also identisch mit dem Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A \mapsto Ax.$$

Insbesondere besitzt \mathcal{S}_A stets den Gleichgewichtspunkt $x^* = 0$ und dieser ist der einzige, falls A invertierbar ist.

Die Lösungen des Systems (107), und damit die Trajektorien des dynamischen Systems \mathcal{S}_A , werden durch die Eigenwerte und -vektoren von A bestimmt. Das charakteristische Polynom

$$\chi_A(X) = X^2 - (a_{11} + a_{22})X + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = X^2 - \text{Sp}(A)X + \det(A)$$

der Koeffizientenmatrix A besitzt die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} := \frac{1}{2}\text{Sp}(A) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\text{Sp}(A)^2 - \det(A)},$$

womit die Größe

$$\Delta := \frac{1}{4}\text{Sp}(A)^2 - \det(A)$$

(wieder!) eine wesentliche Rolle spielt.

Ist A diagonalisierbar, so besitzen nach Korollar 4.17 die komplexwertigen Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ die Form

$$x = \mu_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 v_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \mu_i \in \mathbb{C}, \quad (108)$$

wobei λ_1, λ_2 die beiden nicht notwendig verschiedenen Eigenwerte von A und v_1, v_2 eine Basis von \mathbb{C}^2 bestehend aus Eigenvektoren von A ist. Ist A reell diagonalisierbar, so gilt die Darstellung (108) für die reellen Lösungen mit Eigenvektoren $v_k \in \mathbb{R}^2$ und Koeffizienten $\mu_k \in \mathbb{R}$.

Erfüllt die Lösung x die Anfangsbedingung $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$, so gilt nach Satz 4.16 und L.14 für die Koeffizienten μ_k der zugehörigen eindeutigen Lösung:

$$(\mu_1, \mu_2)^T = (v_1 \ v_2)^{-1} x_0, \quad (109)$$

wobei $(v_1 \ v_2)$ die Matrix mit den Spalten v_i bezeichnet. Insbesondere ergibt sich die Ungleichung

$$|\mu_i| \leq C \|x_0\|_2 \quad (110)$$

mit einer Konstanten $C > 0$, die nur von der Matrix A abhängt: Wie in der Vorlesung »Mathematische Strukturen« bewiesen wird, kann man zum Beispiel

$$C = \sqrt{\sum_{i,j} b_{ij}^2}$$

wählen, wobei $(b_{ij}) := (v_1 \ v_2)^{-1}$. Diese Ungleichung besitzt eine interessante Konsequenz, die sich in der Diskussion des Verhaltens linearer dynamischer Systeme als nützlich erweist:

FESTSTELLUNG 4.32: *Es sei $x' = Ax$ ein lineares Differentialgleichungssystem mit einer diagonalisierbaren Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, deren Eigenwerte λ_1, λ_2 negative Realteile besitzen. Dann gilt: Ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung mit der Eigenschaft*

$$\|x(t_1)\|_2 \leq \delta$$

für ein $t_1 \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\forall t > t_1 \quad \|x(t)\|_2 \leq C' \delta$$

mit einer Konstanten $C' > 0$, welche nur von A und t_1 abhängt.

Weiter gilt für jede Lösung x : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

BEWEIS: Es sei x eine Lösung mit $\|x(t_1)\|_2 \leq \delta$. Für jedes $t > t_1$ gilt nach Voraussetzung und Ungleichung (110):

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_2 &\leq |\mu_1| \|v_1\|_2 e^{\lambda_1 t} + |\mu_2| \|v_2\|_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\leq C \|x(t_1)\|_2 \|v_1\|_2 e^{\lambda_1 t} + C \|x(t_1)\|_2 \|v_2\|_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\leq C \delta \|v_1\|_2 e^{\operatorname{Re}(\lambda_1)t} + C \delta \|v_2\|_2 e^{\operatorname{Re}(\lambda_2)t} \\ &\leq (\|v_1\|_2 e^{\operatorname{Re}(\lambda_1)t_1} + \|v_2\|_2 e^{\operatorname{Re}(\lambda_2)t_1}) C \delta. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Ungleichung besitzt die angestrebte Form $C'\delta$.

Die zweite Aussage ist bei Betrachtung der Formel (108) klar. \square

Wir betrachten nun verschiedenen Fälle im Detail, beschränken uns dabei allerdings auf den Fall einer invertierbaren Koeffizientenmatrix A .

Fall $\det(A) \neq 0$, $\Delta > 0$: Die Matrix A besitzt zwei verschiedene reelle Eigenwerten λ_1, λ_2 , ist also reell diagonalisierbar. Für die weitere Diskussion bietet sich eine Unterscheidung dreier Fälle an.

- $\det(A) > 0$ und $\text{Sp}(A) > 0$.

Dann sind beide Eigenwerte von A positiv, weswegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_2 = \infty$$

für jede Lösung x gilt. Damit ist der (einzige) Gleichgewichtspunkt $x^* = 0$ des dynamischen Systems \mathcal{S}_A instabil.

In Abbildung 55 sind links oben (in grüner Farbe) acht verschiedene Trajektorien des Systems \mathcal{S}_A zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

dargestellt, wobei die Durchlaufrichtung bei zunehmender Zeit wie im Fall des Lotka-Volterra-Systems durch Pfeile angedeutet ist. Man beachte, dass die Trajektorien den Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ nicht enthalten.

Da A reell diagonalisierbar ist, gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1 (zu λ_1) und v_2 (zu λ_2). Diese liefern die vier Lösungen

$$x = v_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x = -v_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x = v_2 e^{\lambda_2 t}, \quad x = -v_2 e^{\lambda_2 t},$$

die in der Abbildung als vier von $(0, 0)$ ausgehende Halbgeraden erscheinen.

Die hier verwendete Darstellung der mit einer zeitlichen Orientierung versehenen Trajektorien wird *Phasenportrait* eines dynamischen Systems genannt. Den hier vorliegenden Typ eines Gleichgewichtspunkt bezeichnet man auch als *instabilen Knoten*.

- $\det(A) > 0$ und $\text{Sp}(A) < 0$.

Beide Eigenwerte sind nun negativ. Eine Anwendung von Feststellung 4.32 liefert die asymptotische Stabilität des Gleichgewichtspunktes $(0, 0)$. Ein solcher Fall liegt für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

vor. Das Phasenportrait von \mathcal{S}_A ist bis auf die Durchlaufrichtung der Trajektorien identisch mit dem in Abbildung 55 links oben gezeigten instabilen Knoten. Man bezeichnet den vorliegenden Fall jetzt allerdings als *asymptotisch stabilen Knoten*.

- $\det(A) < 0$.

Es gibt nun stets einen positiven und einen negativen Eigenwert. Ohne Einschränkung sei $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$. Dann gilt für jede Lösung der Form $x(t) = \mu_1 v_1 e^{\lambda_1 t}$ die Gleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Jede andere Lösung besitzt die Gestalt $x(t) = \mu_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \mu_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ mit $\mu_2 \neq 0$. Für diese Lösungen gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_2 = \infty,$$

womit $(0, 0)$ instabil ist. Man spricht in diesem Fall von einem *Sattelpunkt*.

Das Phasenportrait des Beispiels

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ist in Abbildung 55 rechts oben (in blauer Farbe) zu sehen.

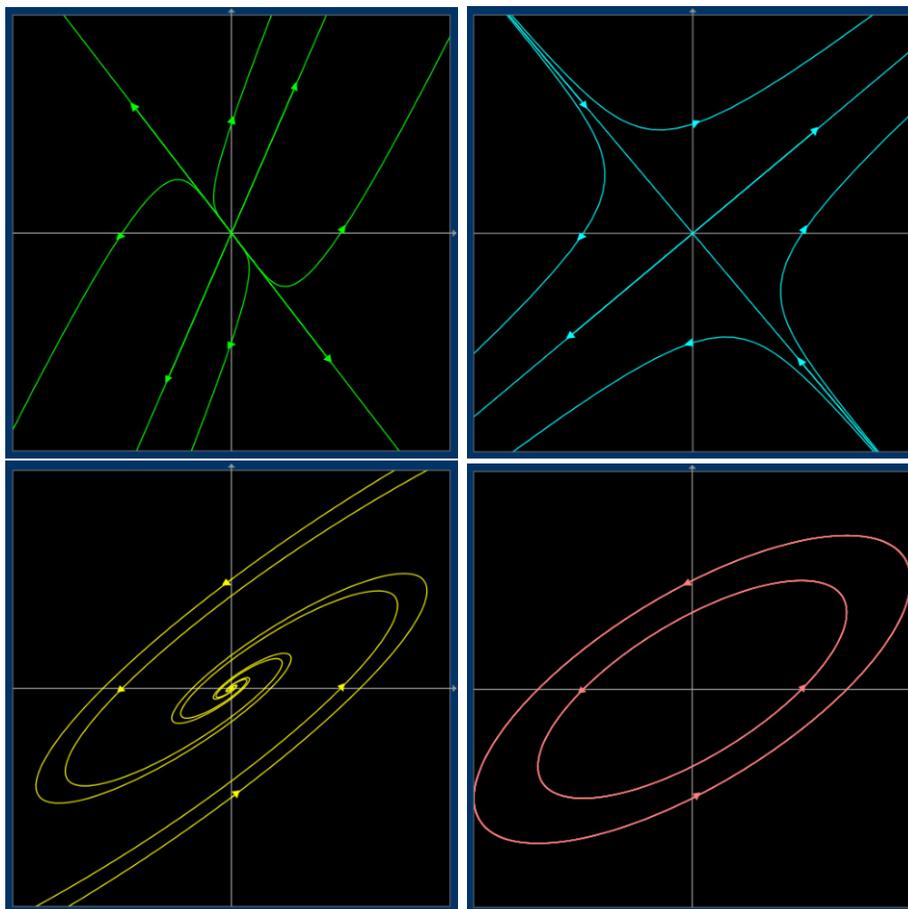


Abbildung 55: Phasenportraits 2-dimensionaler lineare Systeme

Fall $\det(A) \neq 0$, $\Delta < 0$: Die Matrix A ist komplex aber nicht reell diagonalisierbar. Es gilt $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ und nach Formel (100) besitzen alle reellen Lösungen die Gestalt

$$x = u_1 e^{at} \cos(bt) + w_1 e^{at} \sin(bt) \quad (111)$$

mit gewissen Vektoren $u_1, w_1 \in \mathbb{R}^2$, wobei $\lambda_1 = a + bi$ ist.

Es werden nun wiederum drei Fälle unterschieden:

- $\text{Sp}(A) < 0$.

Wegen $\text{Sp}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2a$ ist also $a < 0$ und damit Feststellung 4.32 anwendbar. Sie liefert die asymptotische Stabilität von $(0, 0)$. Ein

Beispiel ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

gegeben; das Phasenportrait mit vier Trajektorien um den *asymptotisch stabilen Strudelpunkt* ist in Abbildung 55 links unten (in gelber Farbe) dargestellt.

- $\text{Sp}(A) = 0$.

Hier gilt $a = 0$, womit die Eigenwerte rein imaginär sind. Um das Verhalten der Trajektorien zu verstehen ist es in diesem Fall besser die komplexe Darstellung (108) zusammen mit der Ungleichung (110) zu betrachten. Dies liefert

$$\|x(t)\|_2 \leq (C\|v_1\|_2 + C\|v_2\|_2)\|x_0\|_2,$$

woraus sich direkt die Stabilität von $(0,0)$ ergibt. In Abbildung 55 rechts unten sind zwei Trajektorien (in roter Farbe) dargestellt.

- $\text{Sp}(A) > 0$.

In der Darstellung (111) ist nun $a > 0$, weshalb für alle Lösungen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_2 = \infty$$

gilt. Der Punkt $(0,0)$ wird nun als *instabiler Strudelpunkt* bezeichnet. Das Phasenportrait von \mathcal{S}_A entspricht dem des asymptotisch stabilen Strudelpunkts allerdings mit umgekehrter Durchlaufrihtung der Trajektorien.

Die bislang diskutierten Fälle und weitere lassen sich übersichtlich in einem Diagramm (Abbildung 56) darstellen, in dem jedes 2-dimensionale, lineare dynamische System \mathcal{S}_A durch das Kennzahlenpaar $(\text{Sp}(A), \det(A))$ als Punkt im \mathbb{R}^2 gegeben ist. Die Lage dieses Punktes im Koordinatensystem und in Bezug zu der Parabel

$$\Delta = 0$$

legt das Verhalten von \mathcal{S}_A in der Nähe der Gleichgewichtspunkte fest. Man beachte hierbei, dass es im Fall einer singulären Matrix A unendlich viele Gleichgewichtspunkte gibt.

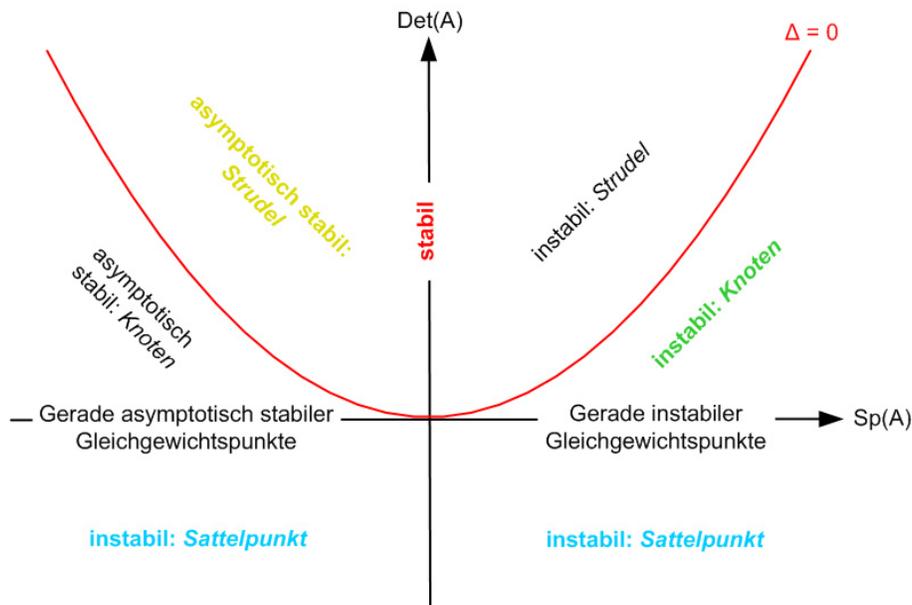


Abbildung 56: Klassifikation 2-dimensionaler, linearer dynamischer Systeme

Literatur

- [B-S] I. Bronstein, K. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Moskau 1956.
- [Ber] L. von Bertalanffy, *Untersuchungen über die Gesetzmäßigkeit des Wachstums*, Roux' Archiv für Entwicklungsmechanik 131 (4), 613–652, 1934.
- [HNW] E. Hairer, S. P. Norset, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1987.
- [Heu] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen – Einführung in Lehre und Gebrauch*, Teubner 2004.
- [Huf] C. B. Huffaker, *Experimental Studies on Predation: Dispersion Factors and Predator-Prey-Oscillations*, Hilgardia 27(14) (1958), 795–835.

- [M-L] C. Moler, C. V. Loan *Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix*, Siam Review 45(1) (2003).
- [Men] T. Mengi, *Über das Wachstum des Steinbutts (Scophthalmus maximus) in der Nordsee*, Berichte der Deutschen Wissenschaftlichen Kommission für Meeresforschung 17, 119-132, 1963.
- [Nie] R. W. Nielsen, *Hyperbolic Growth of the World Population in the Past 12,000 Years*, arXiv:1510.00992, 2015.
- [Som] I. F. Somer, *On a seasonally oscillating growth function*, Fishbyte 6(1), 1988.
- [Spi] K. Spindler, *Höhere Mathematik*, Harri Deutsch 2010.
- [Tho] R. S. W. Thorne, *Mathematical Representation of the Course of Yeast Growth*, The Institute of Brewing Research Scheme, 1939.
- [Wal] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen – eine Einführung*, Springer 2000.
- [Walf] L. A. Walford, *A new graphic method of describing the growth of animals*, Biol. Bull. mar. biol. Lab., Woods Hole 90, 141-147, 1946.
- [Wol] Christina Fiona Wolf, *Untersuchungen zur Pharmakokinetik und Pharmakodynamik von Propofol bei Wachkraniotomien*, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2015.