Parameterschätzung auf Mannigfaltigkeiten

Wie neue mathematische Methoden zu Innovationen in der Raumfahrt, der Medizin und der Sicherheitsindustrie führen

Problemstellung

Zahlreiche Ingenieuranwendungen erfordern die Schätzung von Systemparametern (etwa Richtungsvektoren oder Lagematrizen), die Zwangsbedingungen unterworfen sind und die deswegen als Elemente einer nichtlinearen Mannigfaltigkeit statt als Elemente eines linearen Raums aufzufassen sind. Beispielhaft seien die folgenden Anwendungsprobleme genannt:

- Kalibration von Kamerasystemen, Detektions- und Überwachungsanlagen;
- Spinachsen- und Lagebestimmung von Satelliten; allgemein Schätzung von Rotationsparametern bei Drehbewegungen;
- Entwicklung von Algorithmen der Signalverarbeitung, etwa solche vom Prony-Typ.

Die adäquate Behandlung solcher Anwendungsprobleme erfordert die Übertragung klassischer Filterverfahren auf die neue Situation, die in geeigneter Formulierung immer zu einem Optimierungsproblem auf der fraglichen Mannigfaltigkeit führt (nämlich der Minimierung der geeignet gewichteten Residuen der verfügbaren Messungen).

Lösung des Optimierungsproblems

Zur Lösung der resultierenden Optimierungsaufgabe ist ein geeignetes Iterationsverfahren zu formulieren und zu implementieren. Dies geschieht durch Adaptierung klassischer Filterverfahren: Bezeichnet M die (mit einer Riemannschen Metrik versehene) Mannigfaltigkeit und p den momentan besten verfügbaren Schätzwert, so wird zur Aktualisierung von p dasjenige Inkrement δp im Tangentialraum $T_p M$ ermittelt, das bezüglich des um p linearisierten Problems optimal ist; die Aktualisierung erfolgt dann, indem man von p aus die Länge $\|\delta p\|$ entlang der Geodätischen abträgt, die von p aus in Richtung von δp verläuft (siehe Abb. 1) .

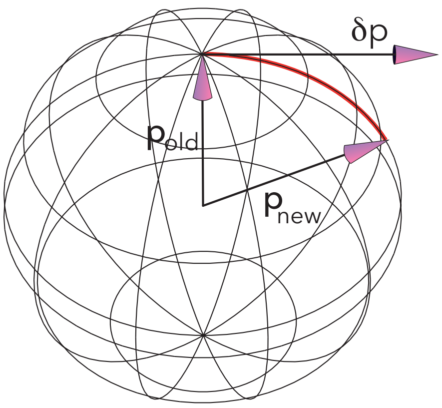


Abb. 1: Iterative Verbesserung des Schätzwertes

Ermittlung eines Startwertes

Da die Lösung des Optimierungsproblems iterativ erfolgt, wird ein Anfangsschätzwert benötigt, der gut genug ist, um als Startwert des verwendeten Iterationsverfahrens zu Konvergenz zu führen. Dies gelingt durch geeignete Mittelbildung von (möglicherweise sehr groben) Anfangsschätzungen, die man jeweils aus minimalen Anzahlen von Messungen analytisch ermittelt, wobei möglichst viele Messungen berücksichtigt werden. Die Mittelbildung erfolgt dabei iterativ; hat man generell Elemente $p_1, \dots , p_n$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und eine Approximation ξ des gesuchten Mittels dieser Elemente, so aktualisiert man ξ zu einer (verbesserten) Approximation $\hat{\xi}$ vermöge

$$\hat{\xi} \;=\; \exp_\xi \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log_\xi(p_i) \right),$$

wobei $\exp_\xi$ die Exponentialfunktion der Mannigfaltigkeit an der Stelle ξ sowie $\log_\xi$ deren Umkehrfunktion bezeichnet; man transferiert also die Mittelbildung von einer lokalen Karte der Exponentialfunktion in den zugehörigen Tangentialraum (siehe Abb. 2).

Das Verfahren arbeitet mit ausgezeichneter Konvergenzgeschwindigkeit und führte in Testläufen selbst dann zur Ermittlung des wahren Mittels, wenn mit einem sehr schlecht gewählten Anfangsschätzwert für das gesuchte Mittel begonnen wurde (siehe Abb. 3 für ein Beispiel).

Fachhochschule Wiesbaden
University of Applied Sciences

Prof. Dr. Karlheinz Spindler
spindler@fab.fh-wiesbaden.de, T 0611 9495-467
Fachhochschule Wiesbaden, Arbeitsgruppe Mathematik
Kurt-Schumacher-Ring 18, D-65197 Wiesbaden

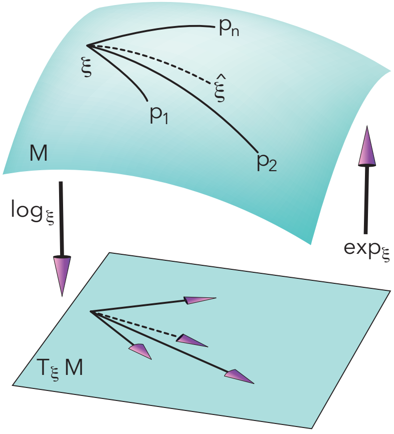


Abb. 2: Iterative Verbesserung des Mittelwertes

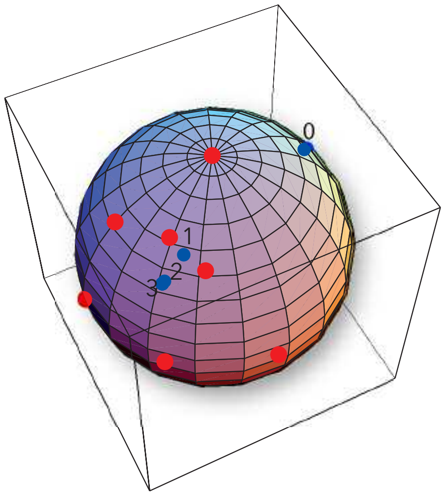


Abb. 3: Iterative Mittelbildung auf einer Sphäre

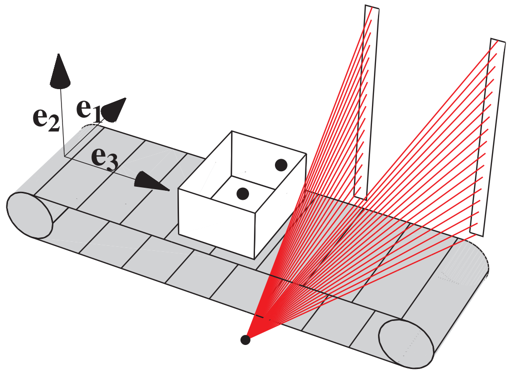


Abb. 4: Detektionsanlage zur Gepäckkontrolle (schematisch)

Erfolgreiche Anwendungen

Das skizzierte Verfahren wurde erfolgreich auf Praxisprobleme aus verschiedenen Bereichen angewandt:

- Kalibration einer Röntgendetektionsanlage zur Gepäckkontrolle an Flughäfen;
- Kalibration eines Mehrkamerasystems zum Einsatz in der Medizin;
- Lagebestimmung von Satelliten;
- Schätzung von Rotationsparametern eines Kometen aus Kamerabildern.

Weitere Anwendungen sind derzeit in Arbeit, zum Teil innerhalb eines Forschungsprojekts, das im Rahmen des Programms FHprofUnd durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) gefördert wird; Kooperationspartner innerhalb dieses Projekts sind die Smiths Heimann GmbH (Wiesbaden), die SciSys GmbH (Darmstadt) sowie die Universität Würzburg.

Abb. 6: Abgleich zwischen lokalen und globalen Positionsdaten

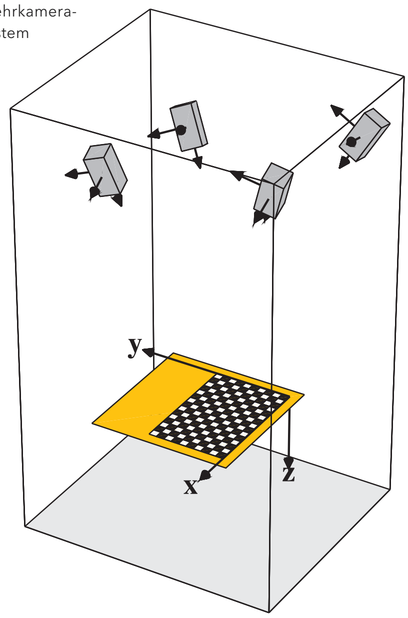
Arbeitsgruppe Mathematik

An der Fachhochschule Wiesbaden hat sich eine kleine, aber äußerst leistungsfähige Arbeitsgruppe auf dem Gebiet der Angewandten Mathematik herausgebildet, die mittlerweile zu den forschungs- und drittmittelstärksten Einheiten der Hochschule gehört. Ihre besonderen Stärken liegen auf folgenden Gebieten:

- Systemtheorie, Systemidentifikation, Parameterschätzung, Bildverarbeitung, Kontrolltheorie;
- Optimierungsverfahren, insbesondere bei geometrisch strukturierten Problemen;
- nichtlineare Differentialgleichungen, singulär gestörte Differentialgleichungen;
- numerische Mathematik, Finite-Elemente-Verfahren, Randelementemethoden;
- Kontinuumsmechanik (insbesondere Elasto- und Strömungsmechanik), Starrkörperbewegung;
- statistische Verfahren, Biometrie.

Ein Konzept für einen Studiengang „Angewandte Mathematik" wurde erarbeitet und (mit sehr guten Ergebnissen) extern begutachtet, aber von der Hochschulleitung bislang noch nicht umgesetzt.

Abb. 5: Zu kalibrierendes Mehrkamera-system



Parameter Estimation on Manifolds

A new parameter estimation method based on differential geometric ideas is presented. This method works faster and more robustly than conventional algorithms and was successfully applied in the calibration of camera and detection systems and in spacecraft attitude estimation.