

Mindestanforderungskatalog Mathematik

HAW Hessen

Notwendige Kompetenzen für den Studienstart

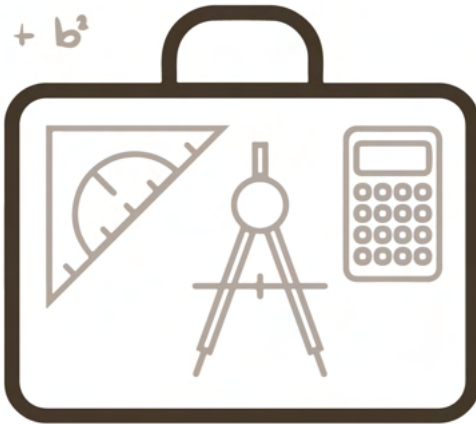
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad x^2 + px + q = 0$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad A^2 + B^2 = C^2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad f(x) = a \cdot x^2 + b$$

$$1 + e^{i\pi} = 0 \quad u = 2(a+b)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$


Stand: März 2025

Redaktion:

Projektgruppe Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschulen für Angewandte Wissenschaften des Landes Hessen

- Prof. Dr. Martin Bokler (Technische Hochschule Mittelhessen)
- Prof. Dr. Peter Dannenmann (Hochschule RheinMain)
- Prof. Dr. Egbert Falkenberg (Frankfurt University of Applied Sciences)
- Raina Jockers, M.Sc. (Frankfurt University of Applied Sciences)
- Dr. Inna Mikhailova (Hochschule Darmstadt)
- Prof. Dr. Agnes Radl (Hochschule Fulda)

Gestaltung und Layout:

- Satz: Florian Hemmann, M.Sc., Dipl.-Math. Boris Sagromski sowie das oben genannte Redaktionsteam
- Titelbild: Michele Bonelli
- Grafiken: Magdalena Cardwell, B.A. (Aufgabe 69, 73, 74), cosh (Aufgabe 20), Prof. Dr. Peter Dannenmann (Aufgaben 23, 70, 79), Florian Hemmann, M.Sc. (Aufgabe 106, 109), Dr. Inna Mikhailova (Aufgabe 71), Prof. Dr. Agnes Radl (Aufgabe 82, 90), Dipl.-Math. Boris Sagromski (Aufgabe 76), Nele Teresa Waters (Aufgabe 7, 72)
- Vorlagen zum Katalog: Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschule RheinMain (Hessen), Mindestanforderungskatalog Mathematik der Gruppe „Kooperation Schule – Hochschule in Baden-Württemberg“ (cosh)

Schlussredaktion:

- Prof. Dr. Benedikt Model (Technische Hochschule Mittelhessen)
- Prof. Dr. Martin Bokler (Technische Hochschule Mittelhessen)
- Prof. Dr. Peter Dannenmann (Hochschule RheinMain)

Weitere Unterstützung:

- OStRin Kerstin Blecker (Theodor-Heuss-Schule Wetzlar)
- StR Dr. Bastian Knippschild (Kultusministerium Hessen)
- OStRin Claudia Schlicker (Limesschule Idstein und Lehrkräfteakademie)
- OStRin Andrea Wellan-Ely (Friedrich-List-Schule Wiesbaden)

Die Inhalte dieses Katalogs stehen unter der **Creative Commons Lizenz CC BY-SA 4.0**. Sie können kopiert oder nach Bearbeitung weiterverwendet werden, solange der Ursprung in angemessener Weise zitiert wird und darauf aufbauende Inhalte unter derselben Lizenz veröffentlicht werden.

Vorwort

Initiiert von den Vizepräsident*innen „Studium und Lehre“ der hessischen Hochschulen für Angewandte Wissenschaften (HAW) wurde zu Beginn des Jahres 2022 eine Projektgruppe mit dem Ziel der Entwicklung eines „Mindestanforderungskatalogs Mathematik“ gebildet. In der Projektgruppe haben pro HAW ein bis zwei Mathematik-Lehrende mitgearbeitet.

An allen HAWen in Hessen zeigen sich bei Studienanfänger*innen im Bereich der Mathematik Probleme beim Übergang von der Schule zur Hochschule. Bei ihnen offenbart sich eine Lücke zwischen den Anforderungen in der Mathematik an den HAWen und den in der Schule vermittelten Mathematikkompetenzen.

Um diese Lücke aufzuzeigen und zu dokumentieren, wurde zu Beginn des Wintersemesters 2022/23 durch das Projektteam ein Test mit Studienanfänger*innen aller hessischen HAWen durchgeführt. Der Test umfasste grundlegende mathematische Fähigkeiten wie z. B. Termumformungen und das Lösen einfacher Gleichungen. Der Test bestätigte die Praxiserfahrungen der Lehrenden und zeigte die Notwendigkeit auf, die Lücke zwischen den Anforderungen der HAWen an die mathematischen Vorkenntnisse der Studienanfänger*innen und deren tatsächlichen Vorkenntnissen zu schließen.

Der vorliegende Mindestanforderungskatalog zeigt die Kompetenzen im Bereich der Mathematik, die bei einem Start eines Studiums an einer HAW erwartet werden. Sowohl Studienanfänger*innen und Studieninteressierten als auch Schulen und Lehrer*innen wird damit eine Orientierung für den Studienstart an einer HAW gegeben. An allen hessischen HAWen gibt es vielfältige Maßnahmen und Zusatzangebote für Studienanfänger*innen zur Erleichterung des Studienstarts im Bereich der Mathematik. Eine nachhaltige Schließung der Lücke zwischen den Anforderungen in der Mathematik an den HAWen und den in der Schule vermittelten Mathematikkompetenzen ist aber nur in Kooperation mit Schulen, Hochschulen und zuständigen Ministerien möglich. Ein von allen hessischen HAWen gemeinsam getragener Mindestanforderungskatalog hilft, in Diskussionen mit Schulen und den zuständigen Ministerien Möglichkeiten zur Überbrückung und Schließung der Lücke zu finden.

Basis für den vorliegenden Katalog ist ein Dokument, das an der Hochschule RheinMain gemeinsam mit Partnerschulen entwickelt wurde und auf der Grundlage des damaligen *Mindestanforderungskatalogs Mathematik – der Hochschulen Baden-Württembergs – für ein Studium von WIMINT-Fächern* (im Folgenden ‚cosh-Katalog‘ genannt) mathematische Mindestanforderungen für ein WIMINT-Studium aufzeigt. Die geforderten mathematischen Kompetenzen werden durch passende Beispielaufgaben verdeutlicht. Einige dieser Beispielaufgaben sind dem aktuellen cosh-Katalog [cosh] entnommen und teilweise verändert worden. Diese Aufgaben sind explizit als Aufgaben des cosh-Katalogs gekennzeichnet.

Die geforderten Kompetenzen unterscheiden sich teilweise zwischen den Studienrichtungen. Sie werden mit folgenden Icons gekennzeichnet:

 Wirtschaftswissenschaften

 Ingenieurwissenschaften

 Informatik

 Bauingenieurwesen

Einige in diesem Katalog genannte Anforderungen gehen über die in den Kerncurricula der Sekundarstufen I und II in Hessen als verpflichtend aufgelisteten Inhalte hinaus. Da jedoch auch sie die mathematische Grundlage für verschiedene Module in den jeweiligen Studienrichtungen bilden, sind sie im vorliegenden Katalog aufgeführt. Sie sind mit Sternen gekennzeichnet:

* Kompetenz wird in der Fachoberschule (FOS) nur fakultativ vermittelt.

** Kompetenz wird an der FOS nicht vermittelt.

*** Kompetenz wird weder an der FOS noch an gymnasialer Oberstufe verpflichtend vermittelt.

Zur mathematischen Basiskompetenz gehört auch die Fähigkeit, Rechnungen und Termumformungen im Kopf durchzuführen. Daher wird man in einzelnen Aufgaben explizit aufgefordert, keinen Taschenrechner zu verwenden. Steht dazu nichts im Aufgabentext, ist die Zuhilfenahme eines Taschenrechners erlaubt.

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine mathematische Kompetenzen	1
1.1	Probleme lösen	1
1.1.1	Fragen stellen	1
1.1.2	Mathematisch modellieren	1
1.1.3	Strategien des Problemlösens anwenden	2
1.1.4	Hilfsmittel (Formelsammlung, elektronische Hilfsmittel) angemessen nutzen	2
1.2	Systematisch vorgehen	3
1.2.1	Zerlegen komplexer Sachverhalte in einfachere Probleme	3
1.2.2	Fallunterscheidungen	3
1.2.3	Sorgfältiges und gewissenhaftes Arbeiten	3
1.3	Plausibilitätsüberlegungen anstellen	4
1.3.1	Fehler identifizieren und erklären	4
1.3.2	Größenordnungen abschätzen	4
1.3.3	Mittels Überschlagsrechnung Ergebnisse kontrollieren	5
1.4	Mathematisch kommunizieren und argumentieren	5
1.4.1	Fachsprache und Fachsymbolik verstehen und verwenden	5
1.4.2	Mathematische Sachverhalte mit Worten erklären	6
1.4.3	Mathematische Behauptungen mithilfe von unterschiedlichen Darstellungsformen begründen oder widerlegen	6
1.4.4	Zusammenhänge visualisieren	6
1.4.5	Graphische Darstellungen wie Funktionsgraphen oder Balkendiagramme interpretieren	7
1.4.6	Eigene sowie fremde Lösungswege nachvollziehbar präsentieren	7
2	Elementare Algebra	8
2.1	Grundrechenarten	8
2.1.1	Grundverständnis der Zahlenräume $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	8
2.1.2	Vorzeichenregeln, Klammerregeln, Ausmultiplizieren, Ausklammern	9
2.1.3	Mit Beträgen rechnen	9
2.2	Bruchrechnung	9
2.2.1	Primfaktorzerlegung**	9
2.2.2	Rechnen mit Bruchzahlen	10
2.2.3	Rechnen mit Bruchtermen**	10
2.3	Proportionalitäten, Prozentrechnung und Dreisatz	10
2.3.1	Proportionalitäten, Dreisatz	10
2.3.2	Prozentangaben, Zins- und Zinseszinsrechnung	10
2.4	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen ermitteln	11
2.4.1	Rechnen mit Potenz- und Wurzeltermen	11
2.4.2	Binomische Formeln	11
2.4.3	Rechnen mit Logarithmen*	12
2.5	Gleichungen mit einer Unbekannten	12
2.5.1	Lineare und quadratische Gleichungen	12
2.5.2	Einfache Exponentialgleichungen*	13
2.5.3	Gleichungen durch Faktorisieren lösen	13
2.5.4	Gleichungen durch Substitution lösen	13
2.6	Ungleichungen mit einer Unbekannten	13

3	Elementare Geometrie und Trigonometrie	14
3.1	Elementare Geometrie	14
3.1.1	Elementargeometrische Objekte anhand ihrer definierenden Eigenschaften identifizieren	14
3.1.2	Grundlegende Sätze der Elementargeometrie	14
3.1.3	Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und einfachen Vielecken berechnen	16
3.1.4	Oberfläche und Volumen einfacher Körper berechnen	16
3.2	Trigonometrie	17
3.2.1	Gradmaß und Bogenmaß unterscheiden und ineinander umrechnen [*]	17
3.2.2	Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen	17
4	Analysis	18
4.1	Funktionen	19
4.1.1	Grundvorstellung des funktionalen Zusammenhangs	19
4.1.2	Lineare Funktionen (inkl. proportionale Funktionen)	19
4.1.3	Quadratische Funktionen	20
4.1.4	Polynomfunktionen höheren Grades	20
4.1.5	Potenzfunktionen	20
4.2	Differenzialrechnung	21
4.2.1	Ableitung an einer Stelle als momentane Änderungsrate und als Tangentensteigung verstehen	21
4.2.2	Differentiationsregeln	21
4.3	Integralrechnung [*]	22
4.3.1	Bestimmtes Integral als Grenzwert von Summen verstehen	22
4.3.2	Bestimmtes Integral sowohl als Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate als auch als orientierten Flächeninhalt interpretieren	22
4.3.3	Begriff der Stammfunktion und Stammfunktionen grundlegender Funktionen	22
4.3.4	Integrationsregeln	22
4.3.5	Bestimmte Integrale mithilfe von Stammfunktionen berechnen	22
5	Lineare Algebra/Analytische Geometrie	23
5.1	Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem	23
5.1.1	Eine analytisch gegebene Gerade zeichnen	23
5.1.2	Koordinatenbereiche skizzieren	23
5.2	Lineare Gleichungssysteme	24
5.2.1	Lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten ohne Hilfsmittel lösen	24
5.2.2	Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten geometrisch im zweidimensionalen Koordinatensystem interpretieren [*]	24
6	Stochastik	25
6.1	Statistische Erhebung und Auswertung	25
6.1.1	Darstellung von Daten	25
6.1.2	Lage- und Streumaße bestimmen	25
6.1.3	Unterschied zwischen Prozentsatz und Prozentpunkten ^{**}	26
6.2	Umgang mit dem Zufall [*]	26
6.2.1	Zufallserscheinungen im Alltag	26
6.2.2	Absolute und relative Häufigkeit	27
6.2.3	Relative Summenhäufigkeiten bestimmen ^{***}	27

6.2.4	Wertebereiche von Zufallsvariablen	27
6.2.5	Mehrstufige Zufallsexperimente	28
6.3	Terme mit Summen-/Produktzeichen lesen bzw. schreiben	28
6.4	Merkmale und Merkmalsausprägungen***	29
6.4.1	Merkmalstypen	29
6.4.2	Merkmalsausprägungen	29

1 Allgemeine mathematische Kompetenzen



Allgemeine mathematische Kompetenzen sind Fähigkeiten und Fertigkeiten, die Studienanfänger*innen unabhängig vom konkreten Themengebiet beim mathematischen Arbeiten einsetzen. Dazu zählen:

- Probleme lösen (Kapitel 1.1, Aufgaben 1-6)
- systematisch vorgehen (Kapitel 1.2, Aufgaben 7-10)
- Plausibilitätsüberlegungen anstellen (Kapitel 1.3, Aufgaben 11-16)
- mathematisch kommunizieren und argumentieren (Kapitel 1.4, Aufgaben 17-24)

Jeder dieser vier Bereiche beinhaltet weitere Aspekte, die selten trennscharf eingesetzt werden. Somit sind sie für jede Studienrichtung unabdingbar relevant.

1.1 Probleme lösen

1.1.1 Fragen stellen

- (1) Im Jahr 2019 hatte Deutschland 42,13 Millionen weibliche und 41,04 Millionen männliche Einwohner*innen. In Hessen lebten 6,29 Millionen Menschen, davon waren 50,62 % weiblich. Die Anzahl der Studierenden betrug in Deutschland 10,40 Millionen, in Hessen 1,04 Millionen und in Berlin 706.100.¹
 - (a) Formulieren Sie Fragen, die mithilfe dieser Daten beantwortet werden können.
 - (b) Formulieren Sie eine Frage, für deren Beantwortung mindestens eine weitere Information notwendig ist.

1.1.2 Mathematisch modellieren

- (2) Die Geschwindigkeit eines Autos beträgt 20 m/s zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten 10 s nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab. Stellen Sie den Geschwindigkeitsverlauf im Intervall von 0 s bis 10 s grafisch dar und geben Sie einen Funktionsterm an, der die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.²

1.1.3 Strategien des Problemlösens anwenden

- (3) Ein Schwimmbecken mit dem Volumen 720 m^3 kann durch drei Leitungen mit Wasser gefüllt werden. Eine Messung ergab, dass die Füllung des Beckens mit den beiden ersten Leitungen zusammen 45 Minuten dauert. Die Füllung mit der ersten und der dritten Leitung zusammen dauert eine Stunde, mit der zweiten und der dritten Leitung zusammen dauert es 1,5 Stunden.³

- (a) Erläutern Sie zunächst, wieso das nachfolgende lineare Gleichungssystem *nicht* geeignet ist, um das Problem zu lösen:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= \frac{3}{4} \\x_1 + x_3 &= 1 \\x_2 + x_3 &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

- (b) Wie groß ist die Wassermenge, die durch jede der drei Leitungen pro Minute ins Becken gepumpt werden kann?
- (c) Wie lange benötigt man bei der Benutzung aller drei Leitungen, um das Becken zu füllen?

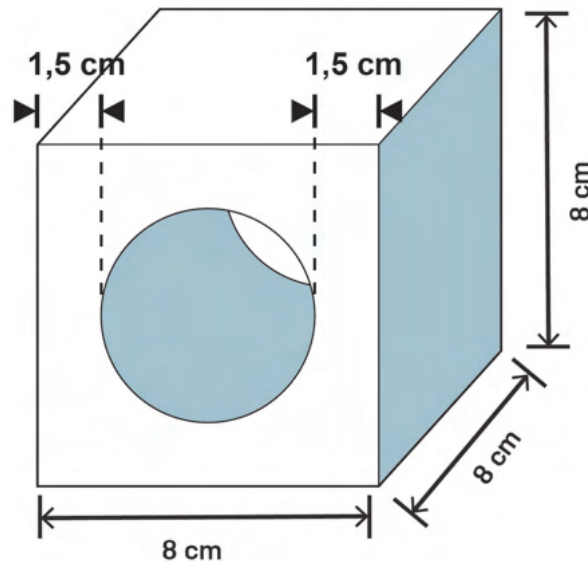
1.1.4 Hilfsmittel (Formelsammlung, elektronische Hilfsmittel) angemessen nutzen

- (4) Begründen Sie, dass jedes Viereck, das zugleich Raute und Rechteck ist, ein Quadrat sein muss.⁴
- (5) Vor 200 Jahren wurden in Entenhausen 2 Dagos – das entspricht $0,3\text{ €}$ – bei einer Bank angelegt und jährlich mit 8% fest verzinst.⁵
- (a) Wie groß wäre das Guthaben heute, wenn die Zinsen stets wieder mitverzinst würden? Stellen Sie eine Wertetabelle auf und skizzieren Sie die Entwicklung des Guthabens in Abhängigkeit von der Zeit.
- (b) Nach wie vielen Jahren wären die 2 Dagos auf 200 Dagos angewachsen?
- (c) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit nach 200 Jahren das Guthaben umgerechnet $2.000.000\text{ €}$ beträgt?
- (6) Bestimmen Sie $\sin(17^\circ)$, $\cos(23^\circ)$, $\cos(\frac{\pi}{5})$, $\tan(19^\circ)$, $\sin(0,5)$.*

1.2 Systematisch vorgehen

1.2.1 Zerlegen komplexer Sachverhalte in einfachere Probleme

- (7) Ermitteln Sie aus den Angaben der folgenden Abbildung das Volumen des Körpers.



1.2.2 Fallunterscheidungen

- (8) Gegeben ist die Funktion $f_s(x) = x^2 - 3x - s$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_s in Abhängigkeit von s .
- (9) Gegeben ist die Gerade $g_k(x) = (k + 3) \cdot (x - 0,5)$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der y -Achse. Für welche Werte von k liegt er oberhalb, unterhalb oder direkt auf der x -Achse?

1.2.3 Sorgfältiges und gewissenhaftes Arbeiten

Siehe auch Aufgabe 104.

- (10) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem ein Dreieck mit den Koordinaten der Eckpunkte $A(1|1)$, $B(5,5|2)$ und $C(2,5|5)$ ein.
- (a) Konstruieren Sie die Mittelsenkrechten und ermitteln Sie deren Schnittpunkt aus der Zeichnung.
- (b) Bestimmen Sie den Radius des Umkreises.

1.3 Plausibilitätsüberlegungen anstellen

1.3.1 Fehler identifizieren und erklären

- (11) In einer Klassenarbeit zum Thema Gleichungen hat ein*e Schüler*in die folgenden Lösungen aufgeschrieben. Prüfen Sie die Lösungen, analysieren Sie die Lösungswege und erläutern Sie die Fehler, die gemacht wurden.

(a)

$$\begin{array}{ll} x^2 - 15 = -6 & | + 15 \\ x^2 = 9 & | \sqrt{} \\ x = 3 & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} 4x - 23 = -2 - x^2 & | + x^2 + 2 \\ x^2 + 4x - 21 = 0 & | \text{ Lösen mit p-q-Formel} \\ x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 21} & \end{array}$$

Keine reelle Lösung, da negative Zahl unter der Wurzel.

(c)

$$\begin{array}{ll} 2x^2 - 6x = 2x - 6 & | \text{ ausklammern} \\ 2x(x - 3) = 2(x - 3) & | : (x - 3) \\ 2x = 2 & | : 2 \\ x = 1 & \end{array}$$

1.3.2 Größenordnungen abschätzen

- (12) Im Jahr 2022 wurde in Hessen auf einer Fläche von 3589 *ha* Wein angebaut. Der durchschnittliche Ertrag pro *Ar* betrug 68,75 *l* (1 *ha* entspricht 100 *Ar*). Schätzen Sie die Länge der Flaschenreihe für den Fall ab, dass man die gesamte Jahresproduktion in Dreiviertelliterflaschen abfüllt und diese Flaschen der Länge nach hintereinanderlegt.⁶
- (13) Ordnen Sie (ohne Verwendung eines Taschenrechners) die angegebenen Zahlen der Größe nach; beginnend mit der kleinsten.⁷

$$0; (0,5)^{-2,4}; 1; 4; 4^{-3,8}; 0,25; 2^{-3,3}; (0,5)^{2,4}; 8; 2^{-3}$$

- (14) Wenn man die Zahlen $a = (10^{10})^{10}$ und $b = 10^{(10^{10})}$ ausschreibt, beginnen sie mit einer 1, danach kommen viele Nullen. Bestimmen Sie ohne Nutzung des Taschenrechners die Anzahl der Stellen der Zahlen a bzw. b .
Auf eine Normseite passen 1800 Zeichen. Ein Drucker benötigt 5 Sekunden, um eine Seite zu drucken. Wie lange braucht er etwa, um die ausgeschriebenen Zahlen a bzw. b zu drucken? Überschlagen Sie zuerst das Ergebnis und berechnen Sie es anschließend.⁸

1.3.3 Mittels Überschlagsrechnung Ergebnisse kontrollieren

- (15) Prüfen Sie ohne genaues Nachrechnen die nachfolgenden Aussagen mit Überschlagsbetrachtungen auf Plausibilität:

(a) $2,94 \cdot 1,98 = 6,01$	(c) $\frac{2^{10}}{10^6} = 1,048576$
(b) $42 \cdot 58 = 243$	(d) $\frac{23,55}{0,125} = 188,4$

- (16) Zu Beginn jedes Jahres werden auf ein Sparbuch 1000 € eingezahlt.⁹

- (a) Das Guthaben wird während der gesamten Zeit mit einem Zinssatz von 5 % pro Jahr verzinst und die Zinsen werden jeweils zum Jahresende dem Guthaben zugeschlagen. Überschlagen Sie, welcher der folgenden Werte dem Guthaben am Ende des 5. Jahres am nächsten kommt. Begründen Sie Ihre Wahl, ohne das genaue Ergebnis zu berechnen.
1250 € 5000 € 5250 € 5800 € 6250 €
- (b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch eine exakte Rechnung.

1.4 Mathematisch kommunizieren und argumentieren

1.4.1 Fachsprache und Fachsymbolik verstehen und verwenden

- (17) Legen Sie für die folgenden Funktionen eine Wertetabelle an und zeichnen Sie die zugehörigen Graphen.

(a) $f(x) = 0,75 \cdot x$	(b) $f(x) = \frac{5}{x}$
---------------------------	--------------------------

Geben Sie an, welche der Funktionen proportional ist, und begründen Sie Ihre Wahl.

- (18) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:^{**}

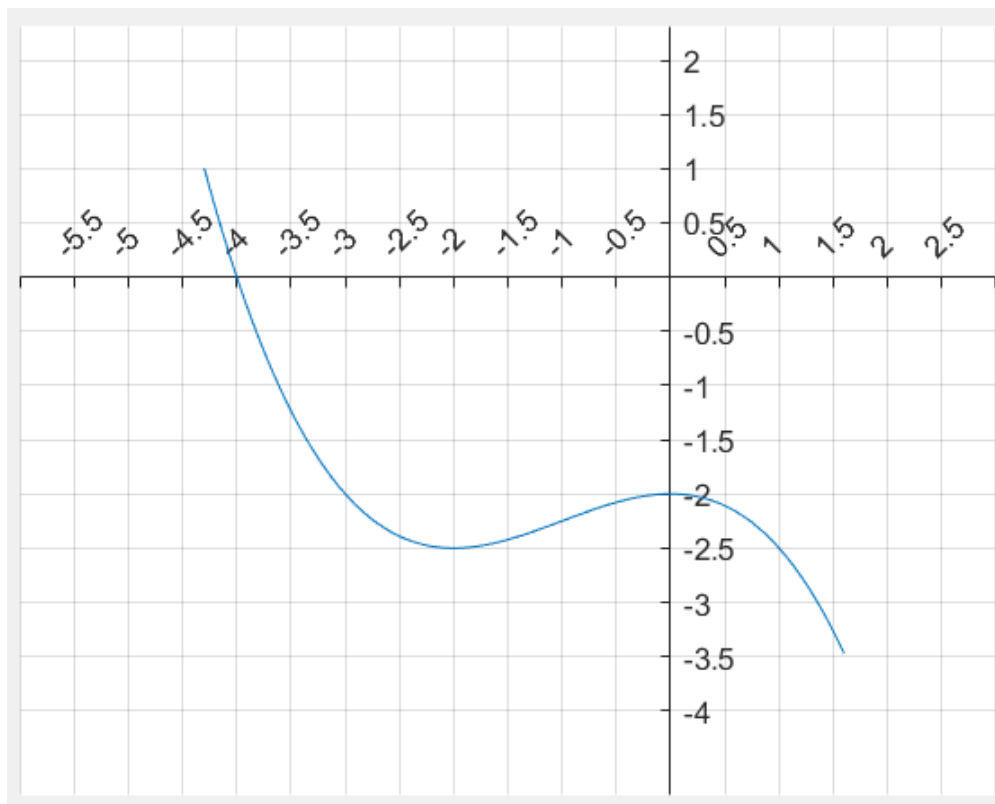
(a) $\sum_{i=1}^9 i$	(b) $\sum_{i=-3}^3 (i+3)$
----------------------	---------------------------

- (c) Gegeben sind die Werte $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ und $x_3 = 5$. Berechnen Sie $\prod_{i=1}^3 x_i$.^{***}

- (19) Prüfen Sie die Gültigkeit der Gleichung $\frac{c}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a}$.

1.4.2 Mathematische Sachverhalte mit Worten erklären

- (20) Die Abbildung zeigt für $-6 \leq x \leq 3$ den Graphen der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h .



Entscheiden und begründen Sie, ob gilt:

- (a) $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle von h .
- (b) $h''(-2) = 1$
- (c) Die Funktion h ist auf dem Intervall $[-3, 1]$ streng monoton fallend.
- (d) Der Graph von h hat an der Stelle $x_2 = -4$ einen Tiefpunkt.

Skizzieren Sie den Graphen von h'' .¹⁰

- (21) Formulieren Sie den Term $a \cdot \sqrt{b \cdot c^2 + d}$ so in Worten, dass ein Zuhörer ihn fehlerfrei aufschreiben kann.¹¹

1.4.3 Mathematische Behauptungen mithilfe von unterschiedlichen Darstellungsformen begründen oder widerlegen

- (22) Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt eines Quadrats vervierfacht, wenn man die Seitenlänge verdoppelt.
- (a) anhand einer Skizze
 - (b) mithilfe einer Berechnung

1.4.4 Zusammenhänge visualisieren

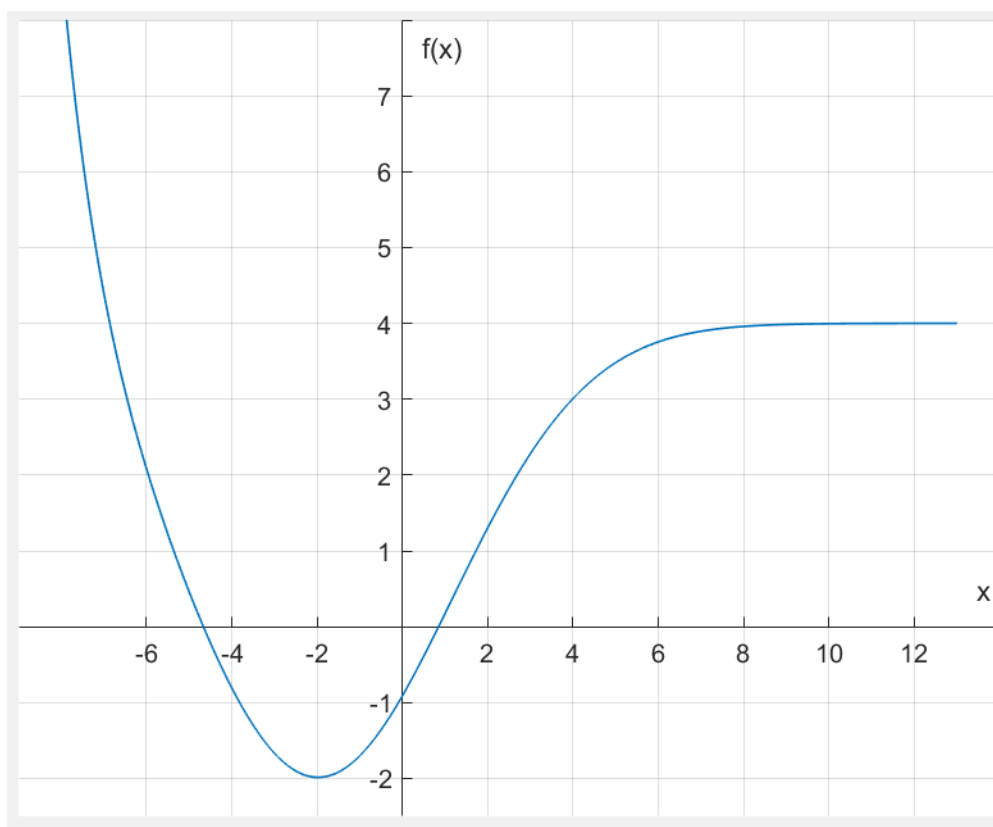
Siehe Aufgabe 5.

1.4.5 Graphische Darstellungen wie Funktionsgraphen oder Balkendiagramme interpretieren

Siehe auch Aufgaben 20, 106 und 109.

(23) Gegeben ist untenstehender Funktionsgraph:

- (a) Bestimmen Sie den Tiefpunkt des Graphen.
- (b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der x- und y-Achse.
- (c) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$.



1.4.6 Eigene sowie fremde Lösungswege nachvollziehbar präsentieren

(24) Eine Person formuliert die Lösung einer Aufgabe in „Kurzschreibweise“:¹²

- (a) Ergänzen Sie die fehlende Rechnung.
- (b) Welches geometrische Problem hatte die Person zu lösen?
- (c) Interpretieren Sie das errechnete Ergebnis geometrisch.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 12x - 5 \\ g(x) &= -6x - 8 \\ f(x) &= g(x) : \\ 3x^2 - 12x - 5 &= -6x - 8 \\ \Leftrightarrow \dots \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

2 Elementare Algebra

Elementare algebraische Umformungen sind das Handwerkszeug, das für die Erarbeitung mathematischer Inhalte im Studium erforderlich ist. Das beinhaltet im Einzelnen, dass Studienanfänger*innen über folgende Kompetenzen verfügen:

- Grundrechenarten: Zahlenräume $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ verstehen und einfache Rechnungen auf diesen ausführen (Kapitel 2.1, Aufgaben 25 - 30)
- Vorzeichen- und Klammerregeln beherrschen (Kapitel 2.1, Aufgaben 31 - 33)
- mit Beträgen rechnen (Kapitel 2.1, Aufgabe 34)
- sowohl mit Bruchzahlen als auch mit Bruchtermen rechnen (Kapitel 2.2, Aufgaben 35 - 39)
- proportionale Zusammenhänge verstehen und sie umsetzen sowie die Prozentrechnung beherrschen (Kapitel 2.3, Aufgaben 40 - 45)
- die Regeln von Potenzen, Wurzeln und Logarithmen beherrschen (Kapitel 2.4, Aufgaben 46 - 55)
- einfache Gleichungen durch geeignete Verfahren lösen (Kapitel 2.5, Aufgaben 56 - 59, 61, 62)

Speziell für Studienanfänger*innen in den Studienbereichen

- Informatik und Ingenieurwissenschaften: einfache Exponentialgleichungen lösen (Kapitel 2.5, Aufgabe 60)
- Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften: Ungleichungen mit einer Unbekannten lösen (Kapitel 2.6, Aufgabe 63)

Wir setzen voraus, dass abgesehen von der Bestimmung eines numerischen Endergebnisses diese Aufgaben ohne Taschenrechner gelöst werden.

2.1 Grundrechenarten



2.1.1 Grundverständnis der Zahlenräume $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

(25) Ordnen Sie die folgenden Zahlen in die Menge der natürlichen, ganzen, rationalen oder reellen Zahlen ein:

(a) -5 (b) $13,7$ (c) $\frac{7}{20}$ (d) $\frac{37}{32}$ (e) 87 (f) $\sqrt{2}$ (g) $\frac{36}{18}$ (h) π

(26) Wandeln Sie ohne Nutzung des Taschenrechners die folgenden Dezimalzahlen in Brüche um:

(a) $0,9$ (b) $-0,99$ (c) $90,0$ (d) $-9,01$

(27) Stellen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die folgenden Brüche als (eventuell periodische) Dezimalzahlen dar:

(a) $\frac{24}{4}$ (b) $-\frac{25}{3}$ (c) $\frac{3,142}{100}$ (d) $-\frac{42}{1000}$

(28) Begründen Sie ohne Zuhilfenahme des Taschenrechners, dass $\left(\frac{99}{41}\right)^2$ zwischen 4 und 9 liegt.¹³

(29) Ermitteln Sie ohne Verwendung des Taschenrechners, zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $\sqrt{150}$ liegt.¹⁴

(30) Vereinfachen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners:

(a) $0,005 \cdot 100$ (b) $\frac{78653}{10^4}$

2.1.2 Vorzeichenregeln, Klammerregeln, Ausmultiplizieren, Ausklammern

(31) Lösen Sie alle Klammern auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(a) $a - (b - 2a) - (3a + 4b)$ (c) $(s^2 + q)(4 \cdot q^2)$
 (b) $3(x + 5) + (3 - x) \cdot 2$ (d) $((m - 2n) - (m + 2n)) - ((n + 2m) - (n - 2m))$

(32) Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die folgenden Ausdrücke:

(a) $(3^4 - (12 - 6)^2 - 3) \cdot (8 - 3)$ (c) $(3^4 - 12 - (6^2 - 3)) \cdot (8 - 3)$
 (b) $((3^4 - 12) - 6^2) - (3 \cdot 8 - 3)$ (d) $3^4 - (12 - 6^2 - 3 \cdot (8 - 3))$

(33) Klammern Sie aus:

(a) $3a^2b + 9ab^2$ (c) $(a - b) \cdot x + (a - b) \cdot y$
 (b) $(4a - 2b)(x + y) - (3a + 4b)(x + y)$ (d) $(15xy + 12bx)(a - c) - (5bx + 10xy)(a - c)$

2.1.3 Mit Beträgen rechnen

(34) Berechnen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners die folgenden Ausdrücke:

(a) $|5 - 7|$ (c) $(-3) + |-8| \cdot 2 + |7 - 11|$
 (b) $|5 - |5 + 5||$ (d) $|5| - |(-6)| + |8 - |-8||$

2.2 Bruchrechnung



2.2.1 Primfaktorzerlegung**

(35) Betrachten Sie die Zahlen 300 und 210.

- (a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegungen dieser Zahlen.
- (b) Bestimmen Sie den ggT (größten gemeinsamen Teiler) und das kgV (kleinste gemeinsame Vielfache) dieser beiden Zahlen.

2.2.2 Rechnen mit Bruchzahlen

(36) Arbeiten Sie ohne Taschenrechner. Vereinfachen Sie die Brüche so weit wie möglich.

(a) $\frac{3}{6}$

(b) $\frac{20}{15}$

(c) $\frac{28}{7}$

(d) $\frac{52}{429}$

(37) Berechnen Sie ohne Taschenrechner und kürzen Sie so weit wie möglich:

(a) $\frac{10}{21} \cdot \frac{42}{55}$

(b) $\frac{17}{28} : \frac{102}{35}$

(c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

(d) $\frac{6}{7} - \frac{7}{9}$

2.2.3 Rechnen mit Bruchtermen**

(38) Bringen Sie $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{x-3}$ auf den Hauptnenner.¹⁵

(39) Vereinfachen Sie die folgenden Brüche.¹⁶

(a) $\frac{45x-20}{36x^2-16x}$

(b) $\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$

(c) $\left(\frac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^3}\right)^3 : \left(\frac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2}\right)^4$

2.3 Proportionalitäten, Prozentrechnung und Dreisatz



2.3.1 Proportionalitäten, Dreisatz

(40) Lösen Sie folgende Textaufgaben.¹⁷

- (a) Ein Pkw verbraucht auf 100 km 9,6 l Benzin. Berechnen Sie, welche Strecke er mit einer Tankfüllung von 60 l zurücklegen kann.
- (b) Von 5 Maurer*innen werden 616 m² Mauerwerk in 154 h hergestellt. Berechnen Sie die Fläche des Mauerwerks, die bei gleicher Leistung durch 6 Maurer*innen in 160 h hergestellt werden kann.
- (c) Eine Kamera hat eine Auflösung von 6 Megapixel (der Einfachheit halber 6 Millionen Pixel) und produziert Bilder im Kleinformat 3 : 2. Berechnen Sie die Größe eines quadratischen Pixels auf einem Ausdruck im Format 60 cm × 40 cm.

2.3.2 Prozentangaben, Zins- und Zinseszinsrechnung

- (41) Der Aktienkurs der Firma XXL fällt im Jahr 2020 um 10 % und wächst in den Jahren 2021 und 2022 um je 5 %. Vergleichen Sie den Kurs Ende 2022 mit dem Kurs zum Beginn von 2020. Berechnen Sie die prozentuale Kursänderung.¹⁸
- (42) Ein Kreissektor füllt 30 % der Fläche eines Kreises aus. Berechnen Sie den zugehörigen Mittelpunktswinkel.¹⁹
- (43) Um welchen Faktor verändert sich der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn eine der Katheten um 20 % verkürzt und die andere um 20 % verlängert wird?²⁰

(44) Berechnen Sie ohne Taschenrechner 4 % von

- (a) 100 (b) 3100 (c) 42 (d) 0,063

(45) Berechnen Sie jeweils die fehlende Größe.

- (a) 60 % von 25 Schüler*innen einer Klasse fahren mit dem Bus zur Schule. Berechnen Sie den Prozentwert.
(b) 14 % der Bewohner*innen einer Kleinstadt sind unter 20 Jahre alt. Das sind 749 Personen. Berechnen Sie die gesamte Einwohner*innenzahl.
(c) Karoline hat 430 Seiten eines 820-seitigen Buches gelesen. Berechnen Sie den Prozentsatz der gelesenen Seiten.

2.4 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen ermitteln



2.4.1 Rechnen mit Potenz- und Wurzeltermen

(46) Schreiben Sie in die Form $\sqrt[n]{x^m}$ bzw. $x^{\frac{m}{n}}$ um.

- (a) $2^{\frac{a}{b}}$ (b) $u^{\frac{7}{3}}$ (c) $\sqrt[5]{v^7}$ (d) $\sqrt{(a+b)}$ (e) $\sqrt[3]{2^b}$

(47) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

- (a) $u^4v^{-4}uv^3u^{-7}v^{-1}uv^2$ (b) $u^{n-1}(u^{n+3} + u^{2-2n})$ (c) $\frac{u^4v^{-9}}{u^{-2}v^{-8}}$

(48) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke unter Verwendung gebrochener Exponenten. Es gilt die Annahme $x, u, v, w > 0$.

- (a) $\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}$ (b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$ (c) $\frac{w\sqrt{uv^3w^{-2}}}{v\sqrt{u^2vw}}$

(49) Ein Blatt Papier ist $100 \mu m$ dick. Wie dick ist es, nachdem es 11 mal gefaltet wurde?

2.4.2 Binomische Formeln

(50) Lösen Sie alle Klammern auf und vereinfachen Sie anschließend so weit wie möglich:

- (a) $(13a - 7b)^2$ (c) $(u + v)^2 - (u - v)^2$
(b) $(6c - 4d)(6c + 4d)$ (d) $(u + v)^2 + (u - v)^2$

(51) Berechnen Sie mithilfe des Distributivgesetzes oder der binomischen Formeln:

- (a) $81 \cdot 79$ (b) 39^2 (c) $13,7^2$ (d) $7,3 \cdot 4,8$ (e) 97^2

(52) Führen Sie eine quadratische Ergänzung durch: *

(a) $x^2 + 5x + 2$

(b) $2x^2 - 8x + 6$

(c) $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 9$

(53) Vereinfachen Sie den Ausdruck:²¹ $\frac{4 - x^2}{4 - 4x + x^2}$

(54) Multiplizieren Sie aus:

(a) $(2^x + 5^x)^2$

(b) $(3^x + 3^{-x})^2$

(c) $(e^{3x} + e^{4x})(e^{3x} - e^{4x})$

2.4.3 Rechnen mit Logarithmen *

(55) Wenden Sie die Definition des Logarithmus und die Logarithmengesetze an.

(a) Bestimmen Sie

i. $\log_2 16$

ii. $\log_5 \sqrt{5}$

iii. $\log_3 \frac{1}{9}$

iv. $10^{\log_{10} 8}$

(b) Formen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze um $(a, u, v, x, y, z > 0)$.***

i. $\log_a \left(\frac{x^2 y^3}{u^4 v} \right)$

ii. $\frac{\log_a(x^3)}{\log_a(\sqrt[4]{x})}$

iii. $\log_a(u) - \log_a(v) + 4 \log_a(z)$

2.5 Gleichungen mit einer Unbekannten

2.5.1 Lineare und quadratische Gleichungen



(56) Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

(57) Lösen Sie die Gleichung $y = \frac{2x - 1}{4}$ nach x auf.

(58) Welche der Aussagen sind in Bezug auf die Gleichung

$$(x - 2)(x - \sqrt{2})(x^2 - 9) = 0$$

richtig? Begründen Sie Ihre Entscheidung.²²

(a) Die Lösungen kann man ohne komplizierte Rechnungen angeben.

(b) $x = 1$ und $x = 2$ sind Lösungen.

(c) $x = 2$ und $x = 3$ sind Lösungen.

(d) $x = 1,4142$ und $x = 2$ sind Lösungen.

(e) Es gibt genau vier Lösungen.

(59) Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

(a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(b) $4x^2 = 12x - 8$

(c) $5x^2 - 9x + 4 = 0$

2.5.2 Einfache Exponentialgleichungen*



(60) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $5^x = 34$

(b) $2^{4x+3} = 128$

(c) $\frac{6^{x-2}}{36^{x+1}} = 216$

2.5.3 Gleichungen durch Faktorisieren lösen



(61) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Gleichung erfüllt?

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

2.5.4 Gleichungen durch Substitution lösen



(62) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Gleichung erfüllt?

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

2.6 Ungleichungen mit einer Unbekannten



(63) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 7 > 2 + 5x$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis grafisch.²³

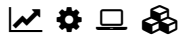
3 Elementare Geometrie und Trigonometrie

Die Geometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit den Eigenschaften von Objekten im Raum befasst. Auf der einfachsten Ebene wie z.B. der Flächenbestimmung oder der Anwendung einfacher geometrischer Sätze benötigen alle Studienbereiche entsprechende Vorkenntnisse. Für die Studienbereiche Bauingenieurwesen, Informatik und Ingenieurwissenschaften sind darüber hinaus Vorkenntnisse über trigonometrische Beziehungen im Dreieck erforderlich. Studienanfänger*innen in den Bereichen Bauingenieurwesen und Ingenieurwissenschaften sollten darüber hinaus in der Lage sein, Oberfläche und Volumen einfacher Körper zu berechnen. Im Einzelnen sollen die Studienanfänger*innen können:

- elementargeometrische Objekte identifizieren und anhand ihrer Eigenschaften wie Umfang, Oberfläche und Volumen untersuchen (Kapitel 3.1, Aufgaben 64, 71 - 74)
- grundlegende Sätze der Elementargeometrie (Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen, Strahlensätze, Kongruenz von Dreiecken, Winkelsummen, Satz des Pythagoras) verstehen und anwenden (Kapitel 3.1, Aufgaben 65 - 70)
- verschiedene Winkelmaße unterscheiden und ineinander umrechnen (Kapitel 3.2, Aufgabe 75)
- Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen (Kapitel 3.2, Aufgaben 76 - 78)

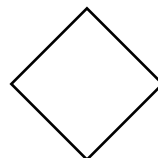
3.1 Elementare Geometrie

3.1.1 Elementargeometrische Objekte anhand ihrer definierenden Eigenschaften identifizieren



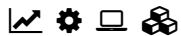
Siehe auch Aufgabe 4.

(64) (a) Wie viele Quadrate und wie viele Rauten sind hier dargestellt?²⁴



- (b) Begründen Sie, dass beide Figuren Quadrate sind.
(c) Zeichnen Sie eine Raute, die kein Quadrat ist.

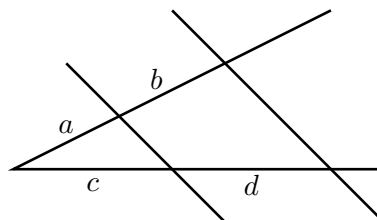
3.1.2 Grundlegende Sätze der Elementargeometrie



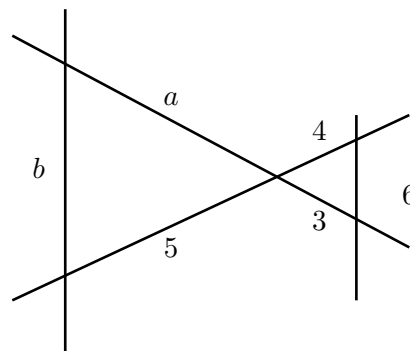
(65) Gegeben ist nebenstehende Abbildung. Bestimmen Sie jeweils die fehlende Größe.

(a) $a = 2, b = 3, c = 4, d = ?$

(b) $a = 7, b = 5, d = 10, c = ?$



- (66) Gegeben ist nebenstehende Abbildung.
Bestimmen Sie die fehlenden Größen a und b .

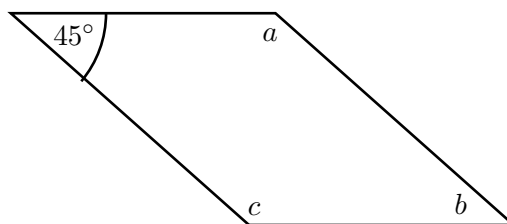


- (67) Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie die gleichen Innenwinkel besitzen. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sind nun D der Höhenfußpunkt von C , E der Höhenfußpunkt von B und S der Schnittpunkt der beiden Höhen DC und EB .²⁵

- (a) Skizzieren Sie den dargestellten Sachverhalt.
(b) Begründen Sie, dass die Dreiecke SCE , ADC , BEA und SDB ähnlich sind.

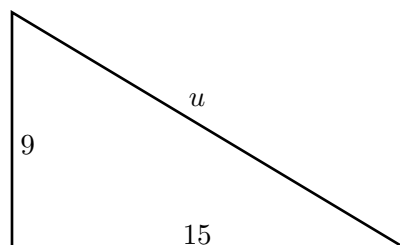
- (68) In einem Fünfeck gibt es die Winkel $\alpha_1 = 80^\circ$, $\alpha_2 = 130^\circ$, α_3 und $\alpha_4 = 110^\circ$. Berechnen Sie den fehlenden Winkel.

- (69) Bestimmen Sie die Winkel a , b und c in dem nebenstehenden Parallelogramm.

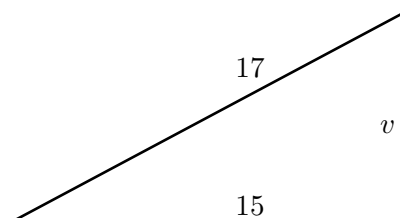


- (70) Gegeben sind die unten dargestellten rechtwinkligen Dreiecke.

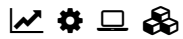
- (a) Bestimmen Sie die Länge der Hypotenuse u .



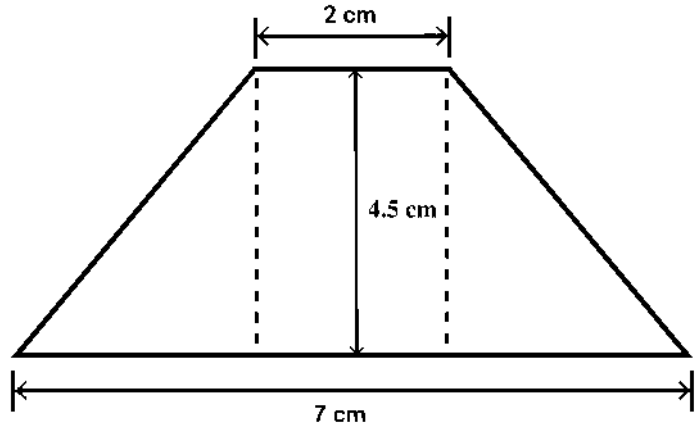
- (b) Bestimmen Sie die Länge der Kathete v .



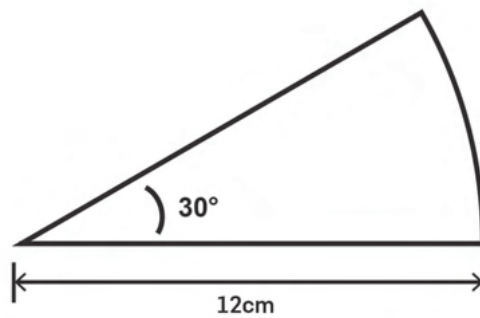
3.1.3 Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und einfachen Vielecken berechnen



- (71) Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang des achsensymmetrischen Trapezes in der nebenstehenden Abbildung.



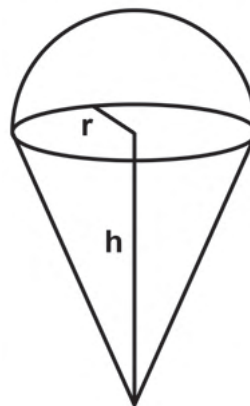
- (72) Berechnen Sie den Flächeninhalt und die Länge des Kreisbogenabschnitts in der nebenstehenden Abbildung.



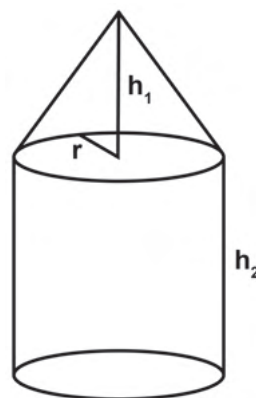
3.1.4 Oberfläche und Volumen einfacher Körper berechnen



- (73) Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Körper, der aus einem Kegel und einer Halbkugel besteht. Es ist $r = 5\text{ cm}$ und $h = 10\text{ cm}$. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Körpers.



- (74) Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Körper, der aus einem Kreiszylinder und einem Kegel besteht. Der Radius von Kegel und Zylinder beträgt r cm, die Höhen betragen $h_1 = 2 \cdot r$ und $h_2 = 1,5 \cdot h_1$. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Körpers.



3.2 Trigonometrie



3.2.1 Gradmaß und Bogenmaß unterscheiden und ineinander umrechnen*

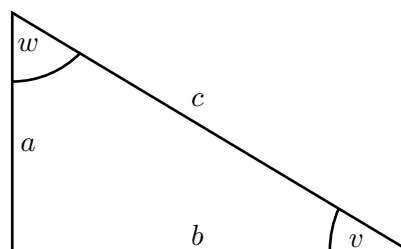
- (75) Ergänzen Sie die folgende Tabelle. Schreiben Sie die Winkel im Bogenmaß als Vielfache von π .²⁶

Bogenmaß	π		$\pi/4$	$-\pi/3$			1
Gradmaß		90°			270°	18°	

3.2.2 Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen

- (76) Bestimmen Sie die fehlenden Größen des rechtwinkligen Dreiecks in der nebenstehenden Abbildung.

- (a) $a = 5$ cm, $w = 65^\circ$
 (b) $v = 12^\circ$, $c = 89$ cm
 (c) $a = 7,3$ cm, $b = 9,9$ cm



- (77) Eine 4 m lange Leiter wird in einer Höhe von 3,80 m an eine Hauswand gelehnt. Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Leiter und dem Boden sowie den Abstand zwischen der Wand und den Füßen der Leiter.²⁷
- (78) Von der auf 1800 m Höhe gelegenen Bergstation einer Seilbahn erscheint die auf 1100 m Höhe gelegene Talstation unter einem Blickwinkel von 42° gegenüber der Waagerechten. Erläutern Sie, welche Größen sich mit Hilfe der Trigonometrie berechnen lassen.²⁸

4 Analysis



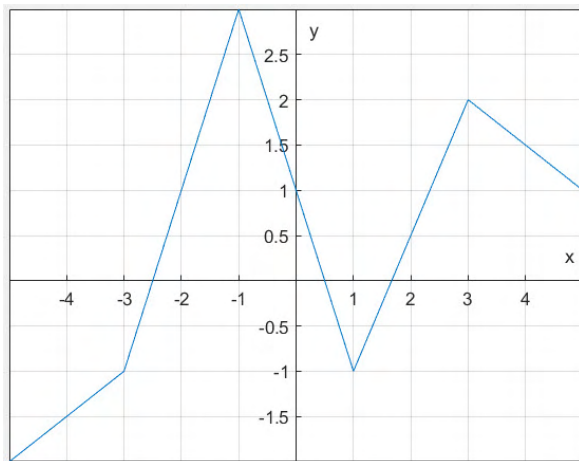
Funktionale Zusammenhänge treten in den Naturwissenschaften und der Technik ebenso wie in den Wirtschaftswissenschaften oder der Informatik in vielfältiger Weise auf. Daher ist es für Studienanfänger*innen essenziell, dass sie derartige Zusammenhänge erkennen und mit elementaren Funktionen wie linearen oder quadratischen bzw. allgemeinen Polynomfunktionen umgehen können. Konkret bedeutet dies:

- Funktionen unterschiedlichen Typs identifizieren und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersuchen (Kapitel 4.1, Aufgaben 79, 83, 88)
- Funktionen unterschiedlichen Typs darstellen und zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen wechseln (Kapitel 4.1, Aufgaben 80 - 82, 84 - 87)
- den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion verstehen (Kapitel 4.2, Aufgaben 89, 90, Kapitel 1.4, Aufgabe 20)
- Differentiationsregeln kennen und auf elementare Funktionen anwenden (Kapitel 4.2, Aufgaben 91, 92)
- eine Grundvorstellung über das bestimmte Integral besitzen (Kapitel 4.3, Aufgaben 93 - 95)
- den Zusammenhang zwischen einer Funktion und einer zugehörigen Stammfunktion kennen und Stammfunktionen bilden (Kapitel 4.3, Aufgaben 96, 97)
- bestimmte Integrale elementarer Funktionen mithilfe von Stammfunktionen berechnen (Kapitel 4.3, Aufgabe 98)

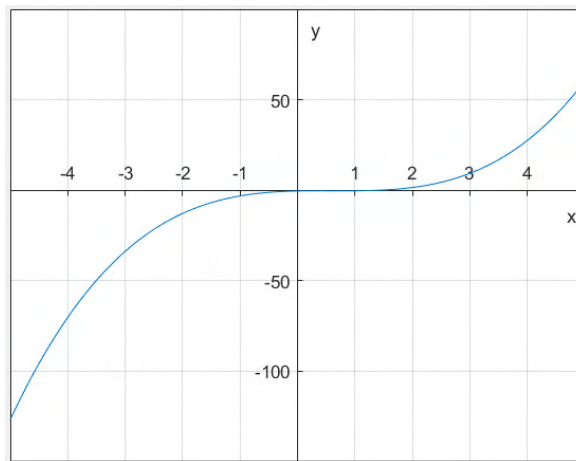
4.1 Funktionen

4.1.1 Grundvorstellung des funktionalen Zusammenhangs

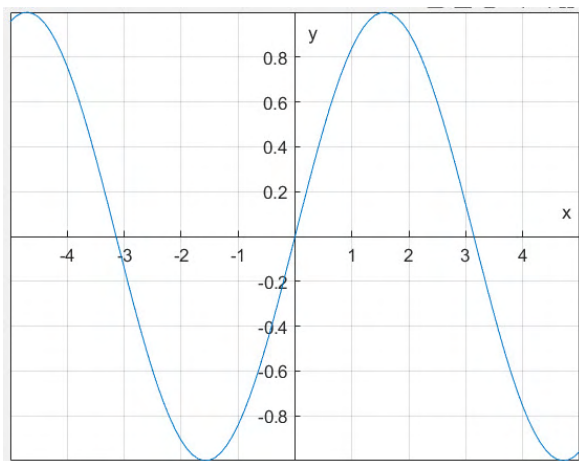
- (79) Markieren Sie diejenigen der unten stehenden Abbildungen, in denen der abgebildete Graph eine Funktion $y = f(x)$ darstellt.



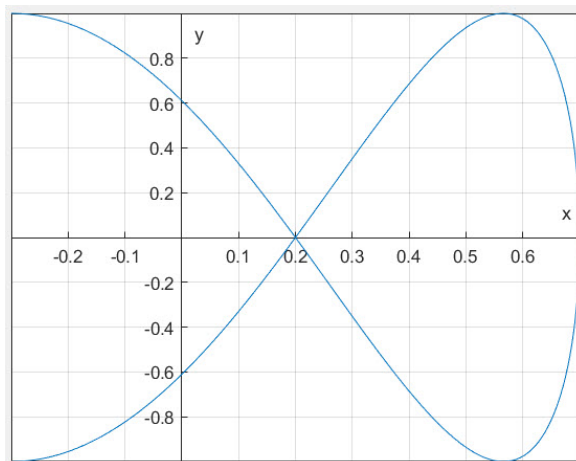
(a)



(b)



(c)

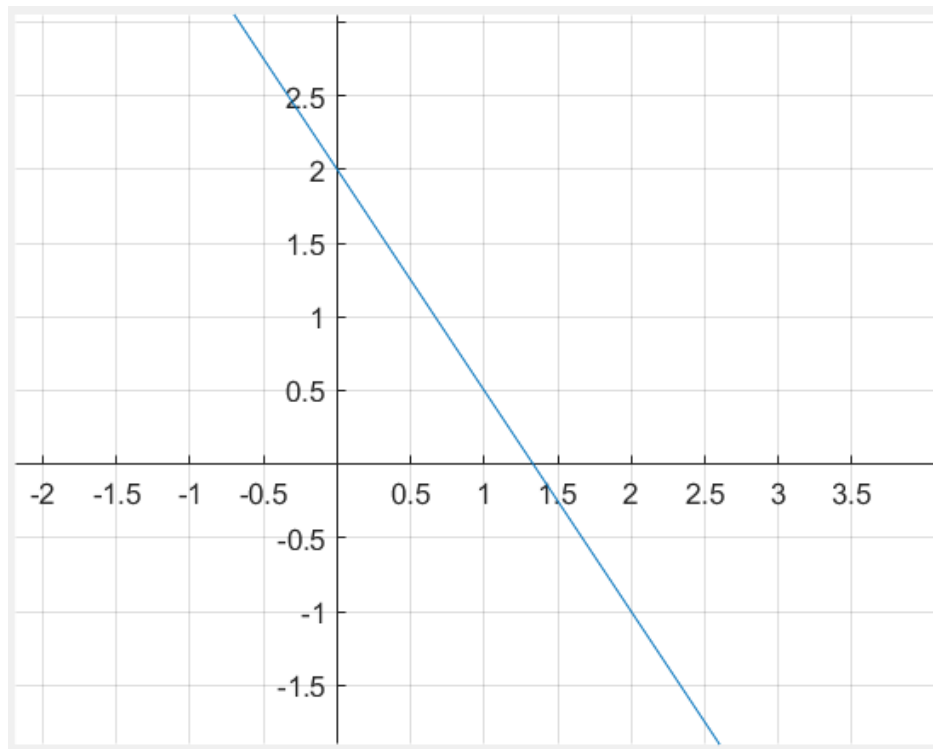


(d)

4.1.2 Lineare Funktionen (inkl. proportionale Funktionen)

- (80) Eine Pflanze wächst täglich um $0,5\text{ mm}$. Am Anfang ist die Pflanze 55 mm groß.
- (a) Wie groß ist die Pflanze nach 10 Tagen?
 - (b) Geben Sie eine Funktion an, die die Größe der Pflanze zu einem beliebigen Zeitpunkt t angibt.
- (81) Stellen Sie die Geradengleichung $y = mx + b$ auf:
- (a) Die Gerade verläuft durch die Punkte $P_1(-2|3)$ und $P_2(2|-4)$.
 - (b) Die Gerade hat die Steigung $m = 3$ und verläuft durch den Punkt $P(-1|3)$.

(82) Geben Sie die Geradengleichung zu der in der Abbildung dargestellten Geraden an.



4.1.3 Quadratische Funktionen

(83) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $p(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

(84) Skizzieren Sie die Parabel $y = (x + 1)^2 + 1$.

(85) Bestimmen Sie die Scheitelform der Parabel $y = x^2 - 2x + 3$ und skizzieren Sie diese anschließend.

(86) Die Punkte $P_1(-1|12)$, $P_2(2|15)$ und $P_3(5|-18)$ liegen auf der Parabel $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Bestimmen Sie die Parabelgleichung.

4.1.4 Polynomfunktionen höheren Grades

(87) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^3 + 7x - 5x^2 + 1$. Berechnen Sie $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

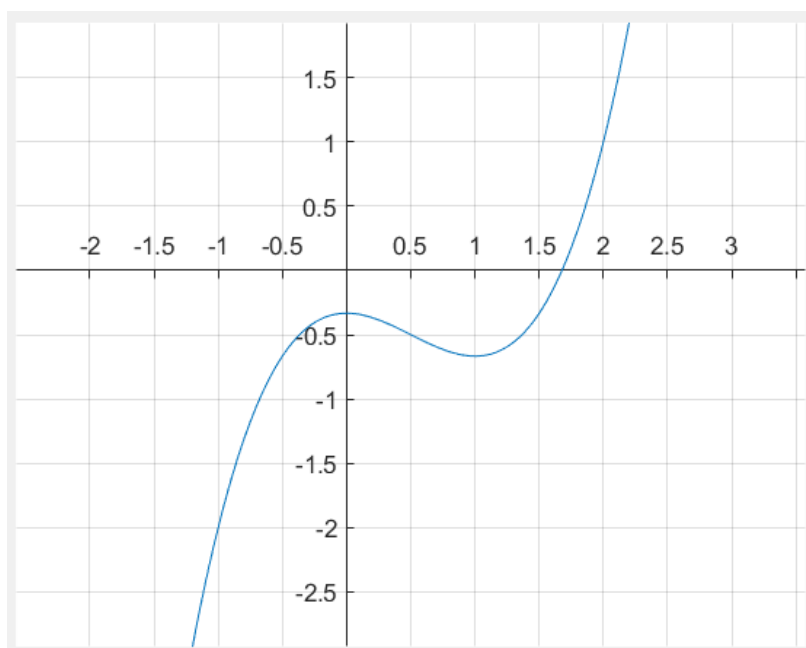
4.1.5 Potenzfunktionen

(88) Skizzieren Sie für $k = 1, \dots, 5$ die Funktionsgraphen von $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ im Intervall $[-2, 2]$.

4.2 Differenzialrechnung

4.2.1 Ableitung an einer Stelle als momentane Änderungsrate und als Tangentensteigung verstehen

- (89) Beurteilen Sie die nachfolgenden Aussagen und geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an, wenn eine Aussage nicht allgemeingültig ist.²⁹
- (a) Besitzt die Funktion f an der Stelle 2 den Funktionswert 1, so gilt $f'(2) = 1$.
 - (b) Gilt $f'(2) = 1$, so hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$ die Steigung 2.
 - (c) Die lokale Änderungsrate der Funktion f mit $f(x) = -0,5x^2 + 2$ an der Stelle -3 ist positiv.
- (90) Betrachten Sie folgenden Funktionsgraphen und markieren Sie jeweils die Bereiche auf der x -Achse, in denen die Ableitungsfunktion Werte kleiner als 0, gleich 0 und größer als 0 annimmt.



4.2.2 Differentiationsregeln

- (91) Die Funktionen f und g sind differenzierbar und α ist eine reelle Zahl. Welche Ableitungsregeln sind richtig?
- (a) Die Ableitung von αf ist $\alpha f'$.
 - (b) Die Ableitung der Summe $f + g$ ist $f' + g'$.
 - (c) Die Ableitung des Produkts $f \cdot g$ ist $f' \cdot g'$.
- (92) Bestimmen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen:
- (a) $f(x) = 4\pi^2$
 - (b) $f(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 - 1$
 - (c) $f(x) = (2 - x^3)^4$
 - (d) $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$

4.3 Integralrechnung*

4.3.1 Bestimmtes Integral als Grenzwert von Summen verstehen

- (93) (a) Berechnen Sie einen Näherungswert für das Integral $\int_0^1 x^2 dx$, indem Sie das Intervall $[0,1]$ in fünf gleiche Teile teilen und damit die Untersumme berechnen.
(b) Wie kann man den Näherungswert verbessern?
(c) Wie erhält man den exakten Wert des Integrals?³⁰

4.3.2 Bestimmtes Integral sowohl als Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate als auch als orientierten Flächeninhalt interpretieren

- (94) Bei einem Becken, das zu Beginn $2000 m^3$ Wasser enthält, fließt Wasser ein und aus. Die Zuflussgeschwindigkeit kann für $t \in [0,70]$ durch die Funktion f beschrieben werden: $f(t) = -t^2 + 40t + 225$ (t in Tagen seit Beginn, $f(t)$ in m^3/Tag). Bestimmen Sie die Funktion, die die vorhandene Wassermenge zu jedem Zeitpunkt angibt. Berechnen Sie, wie viel Wasser sich nach 30 Tagen im Becken befindet.³¹
- (95) Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = 2x + 1$.
(a) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen.
(b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x -Achse einschließt.
(c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.³²

4.3.3 Begriff der Stammfunktion und Stammfunktionen grundlegender Funktionen

- (96) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar. Ihre Ableitung ist f' . Welche Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antworten.³³
(a) Die Funktion f hat genau eine Ableitung aber viele Stammfunktionen.
(b) Sind F und G Stammfunktionen zu f , so ist auch die Summe $F + G$ eine Stammfunktion zu f .
(c) Ist F eine Stammfunktion von f , so gilt $f'(x) = F(x)$.
(d) Zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.

4.3.4 Integrationsregeln

- (97) Geben Sie je zwei Stammfunktionen zu den nachfolgenden Funktionen an.

(a) $f(x) = x^3 - 2x + 4$

(b) $f(x) = x^k, (k \in \mathbb{N})$

4.3.5 Bestimmte Integrale mithilfe von Stammfunktionen berechnen

- (98) Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

(a) $\int_0^2 (x^3 - 2x + 4) dx$

(b) $\int_{-1}^2 x^k dx$ für $k \in \mathbb{N}$.

5 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Eine zentrale Aufgabe der linearen Algebra ist es, lineare Beziehungen zwischen verschiedenen mathematischen Größen zu betrachten und diese aufzulösen. Diese Zusammenhänge können in einem Koordinatensystem veranschaulicht werden. Damit können Lösungsmengen, die diese Zusammenhänge erfüllen, sowohl rechnerisch als auch geometrisch ermittelt werden. Studienanfänger*innen aller Studienbereiche besitzen folgende Kompetenzen:

- eine analytisch gegebene Gerade in einem zweidimensionalen Koordinatensystem zeichnen (Kapitel 5.1, Aufgaben 99, 100)
- zweidimensionale lineare Gleichungssysteme lösen und Ergebnisse geometrisch interpretieren (Kapitel 5.2, Aufgaben 102, 103)

Darüber hinaus wird von Studienanfänger*innen der Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften die Kompetenz erwartet, Koordinatenbereiche in einem zweidimensionalen Koordinatensystem zu skizzieren (Kapitel 5.1, Aufgabe 101).

5.1 Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem

5.1.1 Eine analytisch gegebene Gerade zeichnen



(99) Zeichnen Sie die Lösungsmengen:³⁴

- (a) $y = -2x + 3$
- (b) $-2x + y - 5 = 0$
- (c) $x + 8 = 0$

(100) Zeichnen Sie:³⁵

- (a) die Gerade mit Steigung 3 durch den Punkt $P(0|3)$
- (b) die Gerade mit Steigung -2 durch den Punkt $P(2|3)$
- (c) die Gerade durch die Punkte $P_1(-4|-3)$ und $P_2(1|3)$

5.1.2 Koordinatenbereiche skizzieren



(101) Schraffieren Sie in einem Koordinatensystem für x zwischen 0 und 6 das Gebiet, in dem $y \leq x$ und $y \geq 0$ ist.

5.2 Lineare Gleichungssysteme



5.2.1 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten ohne Hilfsmittel lösen

(102) Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & 6x + 4y = 24 \\ & 12 - 4y = 5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & x + 2y - 5 = 0 \\ & 4y + 2x = 10 \end{aligned}$$

5.2.2 Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten geometrisch im zweidimensionalen Koordinatensystem interpretieren^{*}

(103) Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in der x_1x_2 -Ebene:

$$\begin{aligned} g : & 2x_1 + x_2 = 1 \\ h : & x_1 - x_2 = 3 \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Zeichnung.³⁶

6 Stochastik



Stochastik ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Beschreibung und Berechnung von zufälligen Ereignissen und Prozessen befasst. In der Regel werden Stochastik-Kenntnisse in den Studiengängen der hessischen Hochschulen für Angewandte Wissenschaften vermittelt, jedoch werden von Studienanfänger*innen der Wirtschaftswissenschaften folgende grundlegende Kompetenzen erwartet:

- Lage- und Streumaße erhobener Daten ermitteln, Daten in Diagrammen darstellen und Diagramme interpretieren (Kapitel 6.1, Aufgaben 104 - 107)
- Wahrscheinlichkeiten sowie absolute und relative Häufigkeiten von Zufallsereignissen bestimmen sowie Wertebereiche von Zufallsvariablen angeben (Kapitel 6.2, Aufgaben 108 - 112)
- Häufigkeitsverteilungen mehrerer Merkmale bei mehrstufigen Zufallsexperimenten passend darstellen (Kapitel 6.2, Aufgabe 113, 114)
- Terme mit Summen- und Produktzeichen verstehen und anwenden (Kapitel 6.1, Aufgabe 106, Kapitel 6.3, Aufgabe 18)
- Merkmale und Merkmalsausprägungen in erhobenen Daten identifizieren (Kapitel 6.4, Aufgaben 115, 116)

6.1 Statistische Erhebung und Auswertung

6.1.1 Darstellung von Daten

- (104) Die Körpergrößen aller Schüler*innen einer Schulklasse werden gemessen. Die gemessenen Körpergrößen in *cm* sind:
138; 143; 154; 158; 163; 146; 165; 161; 139; 167; 152; 155; 148; 160; 159; 142.
Teilen Sie die Messdaten in die Kategorien ›130 – 139 *cm*‹, ›140 – 149 *cm*‹, ›150 – 159 *cm*‹ und ›160 – 169 *cm*‹ ein und erstellen Sie sowohl ein Säulen- als auch ein Kreisdiagramm.

6.1.2 Lage- und Streumaße bestimmen

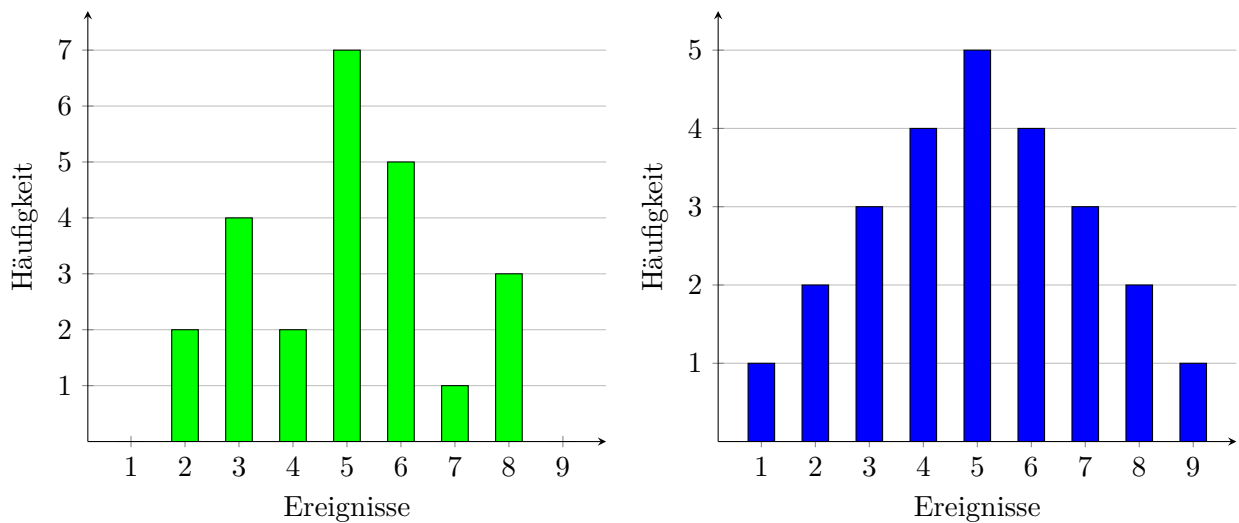
- (105) Die Besucher*innen eines Theaterstücks werden nach ihrem Alter gefragt. Die erhaltenen Antworten sind: 62; 80; 88; 16; 51; 49; 46; 84; 51; 84; 21; 51; 64; 18; 25; 37; 73; 74 Jahre.

- (a) Ermitteln Sie die Werte der nebenstehenden Tabelle.

- (b) Verwenden Sie die ermittelten Werte, um einen Boxplot zu zeichnen.

Kenngröße	Wert
Arithmetischer Mittelwert	
Minimum	
Maximum	
1.Quartil***	
Median (2.Quartil)	
3.Quartil***	
Spannweite	
Modalwert***	

- (106) Bestimmen Sie zu den beiden dargestellten Verteilungen arithmetisches Mittel, Median, Standardabweichung und Varianz.



6.1.3 Unterschied zwischen Prozentsatz und Prozentpunkten**

- (107) Laut Kraftfahrtbundesamt wurden im Jahr 2020 2.917.678 Personenkraftwagen neu zugelassen. Davon waren 194.163 Elektro-PKW (Battery Electric Vehicles).
Im Jahr 2021 wurden 2.622.132 Personenkraftwagen neu zugelassen. Davon waren 355.961 Elektro-PKW.
- Berechnen Sie jeweils den Prozentsatz der in den Jahren 2020 und 2021 in Deutschland neu zugelassenen Elektro-PKW.
 - Um welchen Prozentsatz (bezogen auf das Jahr 2020) stieg der Anteil der neu zugelassenen Elektro-PKW im Jahr 2021?
 - Um welchen Prozentsatz (bezogen auf das Jahr 2020) stieg die absolute Anzahl der neu zugelassenen Elektro-PKW im Jahr 2021?
 - Um wie viele Prozentpunkte stieg der Anteil der Elektro-PKW an den insgesamt zugelassenen PKW?

6.2 Umgang mit dem Zufall*

6.2.1 Zufallserscheinungen im Alltag

- (108) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse bei einem Wurf zweier Laplace-Würfel.

E_1 : Es wird ein Pasch (zweimal die gleiche Augenzahl) gewürfelt.

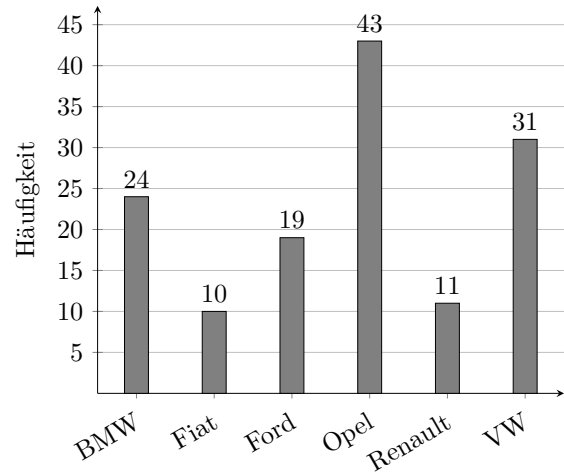
E_2 : Es wird genau eine 6 gewürfelt.

E_3 : Die Summe der gewürfelten Augenzahlen beträgt 9.

6.2.2 Absolute und relative Häufigkeit

- (109) Auf dem Parkplatz einer Hochschule werden Automarken gezählt. Das Diagramm führt alle Marken auf, von denen mindestens 10 Fahrzeuge vor Ort waren.

- (a) Geben Sie die relative Häufigkeit jeder Automarke an.
- (b) Eine zufällig ausgewählte Person, die mit dem Auto zum Campus fährt, ist auf dem Weg zu ihrem Wagen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört ihr Auto zu einer deutschen Marke (BMW, Opel, VW)?
- (c) In einer Stadt sind rund 164.000 PKW zugelassen. Schätzen Sie, ausgehend von der vorliegenden Stichprobe, wie viele Fahrzeuge der Marke Opel voraussichtlich dabei sind.



6.2.3 Relative Summenhäufigkeiten bestimmen***

- (110) Bei einem Halbmarathonlauf (Männerwertung) wurden die in unten stehender Tabelle genannten Zeiten von der jeweiligen Anzahl von Finishern erreicht.

Zeit [h]	<1:10	$\geq 1:10$ < 1:20	$\geq 1:20$ < 1:30	$\geq 1:30$ < 1:40	$\geq 1:40$ < 1:50	$\geq 1:50$ < 2:00	$\geq 2:00$ < 2:10	$\geq 2:10$ < 2:20	$\geq 2:20$
Anzahl	18	80	135	303	418	461	246	134	112

- (a) Bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten der Finisher in den einzelnen Zeit-Bereichen.
- (b) Bestimmen Sie die relativen Summenhäufigkeiten der Finisher für die einzelnen Zeit-Obergrenzen.
- (c) Ein Teilnehmer wird in einem Interview nach seiner erreichten Zeit gefragt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreichte er das Ziel unter 1:30 h?

6.2.4 Wertebereiche von Zufallsvariablen

- (111) In einer Urne befinden sich blaue und rote Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen. Die Zufallsvariable X beschreibt dabei die Farbe der gezogenen Kugel. Welchen Wertebereich umfasst die Variable X ?
- (112) In einer Urne befinden sich n Kugeln, die von 1 bis n durchnummeriert sind. Aus der Urne werden k Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X beschreibt die maximale Nummer einer gezogenen Kugel. Welchen Wertebereich umfasst die Variable X ?

6.2.5 Mehrstufige Zufallsexperimente

(113) In einer Urne befinden sich 9 gleichartige Kugeln, davon sind 4 rot, 2 blau und 3 grün. Es werden nacheinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

(a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, welches alle möglichen Ereignisse erfasst.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

E_1 : Die erste Kugel ist rot, die zweite Kugel ist blau.

E_2 : Mindestens eine Kugel ist grün.

(114) In einem Gartenbaubetrieb werden 1200 von 1800 Pflanzen mit einem biologischen Pflanzenschutzmittel behandelt. Nach einer bestimmten Zeit wird jede Pflanze auf Schädlingsbefall untersucht. Die Ergebnisse sind in einer Vierfeldertafel dargestellt. Das Ereignis A ist „Pflanze ist behandelt“ und das Ereignis B „Pflanze hat Schädlinge“.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten:

E_1 : Eine Pflanze ist behandelt.

E_2 : Eine Pflanze ist nicht behandelt und hat Schädlinge.

E_3 : Eine Pflanze, von der man weiß, dass sie nicht behandelt ist, hat Schädlinge.

E_4 : Eine Pflanze, von der man weiß, dass sie keine Schädlinge hat, ist behandelt.

Gruppe	B	nicht B	Summe
A	120	1080	1200
nicht A	240	360	600
Summe	360	1440	1800

6.3 Terme mit Summen-/Produktzeichen lesen bzw. schreiben

Siehe Aufgabe 18

6.4 Merkmale und Merkmalsausprägungen***

6.4.1 Merkmalstypen

(115) Im Rahmen eines fünftägigen internationalen Jongleur*innentreffens führt die veranstaltende Organisation eine Befragung der Teilnehmer*innen durch. Erhoben werden folgende Merkmale:

- Nationalität
 - genutzte Jonglierrequisiten (z. B. Bälle, Keulen, Ringe, Devilsticks, Diabolo, Cigar Boxes etc.)
 - eigene Einschätzung der Jonglierfähigkeiten (Ausprägungen: Anfänger*in, Fortgeschrittene*r, Profi)
 - Anfahrrststrecke
 - Anzahl der Tage, an denen das Treffen besucht wird
- (a) Klassifizieren Sie, welche der oben genannten qualitative und welche quantitative Merkmale sind.
- (b) Beschreiben Sie bei qualitativen Merkmalen darüber hinaus, ob die zugehörige Skala eine nominale oder ordinale ist.
- (c) Geben Sie bei quantitativen Merkmalen an, ob sie anhand einer diskreten oder kontinuierlichen Skala beschrieben werden.

6.4.2 Merkmalsausprägungen

(116) Das Hessische Statistische Landesamt möchte eine Befragung der Milchviehbetriebe im Land Hessen durchführen. Dazu sollen folgende Merkmale der Betriebe erfasst werden:

- Standort des Betriebes
- Bewirtschaftete Fläche [ha]
- Bestand an Milchvieh
- jährliche Milchproduktion
- Abnehmer der produzierten Milch

Beschreiben Sie zu jedem Merkmal, welche Ausprägungen es annehmen kann.

Literatur

[cosh] COSH-GRUPPE: *Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 3.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WI MINT-Fächern*. November 2021. <https://cosh-mathe.de/wp-content/uploads/2021/12/makV3.0.pdf>; letzter Aufruf 13.3.2023

Übersicht der entnommenen Aufgaben aus [cosh]

- ¹Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 1 des cosh-Katalogs. Inhalte wurden angepasst und aktualisiert.
- ²Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 2 des cosh-Katalogs.
- ³Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 4 des cosh-Katalogs.
- ⁴Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 49 des cosh-Katalogs.
- ⁵Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 18 des cosh-Katalogs.
- ⁶Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 8 des cosh-Katalogs. Inhalte wurden angepasst und aktualisiert.
- ⁷Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 13 des cosh-Katalogs.
- ⁸Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 14 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ⁹Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 9 des cosh-Katalogs.
- ¹⁰Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 15 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ¹¹Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 16 des cosh-Katalogs.
- ¹²Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 20 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ¹³Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 21 a) des cosh-Katalogs. Die Inhalte wurden angepasst.
- ¹⁴Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 21 b) des cosh-Katalogs. Die Inhalte wurden angepasst.
- ¹⁵Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 29 des cosh-Katalogs.
- ¹⁶Teil (c) dieser Aufgabe entspricht Aufgabe 31 des cosh-Katalogs.
- ¹⁷Teil (c) dieser Aufgabe entspricht Aufgabe 28 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ¹⁸Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 33 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ¹⁹Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 34 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ²⁰Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 35 des cosh-Katalogs.
- ²¹Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 26 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ²²Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 40 des cosh-Katalogs.
- ²³Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 44 des cosh-Katalogs.
- ²⁴Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 48 des cosh-Katalogs.
- ²⁵Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 50 des cosh-Katalogs.
- ²⁶Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 55 (c) des cosh-Katalogs.
- ²⁷Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 57 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ²⁸Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 58 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ²⁹Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 72 des cosh-Katalogs.
- ³⁰Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 80 des cosh-Katalogs.
- ³¹Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 81 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ³²Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 85 des cosh-Katalogs.
- ³³Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 82 des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ³⁴Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 86 (a)-(c) des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ³⁵Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 86 (d)-(f) des cosh-Katalogs und wurde überarbeitet.
- ³⁶Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 92 des cosh-Katalogs.